Math. Un.
91 s. - 3

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

<36606449940015
<36606449940015
Bayer. Staatsbibliothek

R

J. L. Lagrange's

mathematische

Werke.

Deutsch herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Dritter Band.

Die Theorie der Gleichungen.

Berlin, bei G. Reimer.

1824.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Ueber die Auflösung der numerischen Gleichungen von beliebigen Graden.

Nebst Bemerkungen über verschiedene, die Theorie der algebraischen Gleichungen betreffende Gegenstände;

von

J. L. Lagrange,

Mitgliede des Instituts der Künste und Wissenschaften, des Längen-Büreau's und des Senat-Conservateur, Grosskreuze der Ehren-Legion und Reichsgrafen.

Neue, vom Verfasser durchgesehene und vermehrte Auflage.

Ins Deutsche übersetzt und mit Anmerkungen begleitet

von

Dr. A. L. Crelle,

Königl. Preuss. Geheimen Ober-Baurathe.

Berlin, bei G. Reimer.

1824.

Vorrede des Uebersetzers.

Die Aufgabe, algebraische Gleichungen beliebiger Ordnungen allgemein aufzulösen, ist eine der ältesten in der Analysis. Daher sind die Bemühungen um diese Aufgabe, deren Auflösung bis jetzt noch nicht vollständig gelang, zahlreich, und der Aufwand an Scharfsinn, den die vorzüglichsten Analysten derselben widmeten, ist gross. Auch Lagrange umfasste den Gegenstand mit der ganzen Kraft seines Geistes, und, wie überall, verdankt Ihm die Mathematik auch hier wichtige Entdeckungen und Fortschritte. Er eilte auch hier seiner Zeit vor; und obgleich seit seinen Arbeiten über die algebraischen Gleichungen zum Theil schon an funfzig Jahre verflossen sind, ist seitdem wenig Neues hinzugekommen. Der grosse Denker hat das

Vergnügen gehabt, dieses selbst noch wahrzunehmen und in seinen letzten Jahren sagen zu können.

Die gegenwärtige Schrift Lagrange's enthält das Wichtigste und Bemerkenswertheste, was seit mehr als zwei Jahrhunderten über die algebraischen Gleichungen gewagt und gefunden worden, und das Vorzüglichste und Eindringendste davon ist unstreitig, was Lagrange selbst angehört. Kaum kam irgend Jemand der noch nicht entdeckten allgemeinen und strengen Auflösung der Aufgabe näher, als unser Verfasser; und auch die ihm zugehörige Methode, die Wurzeln einer gegebenen Gleichung Näherungsweise, auf sicherm Wege, durch Berechnung der kleinsten Differenz der Wurzeln zu finden, ist unstreitig die einzige, bis jetzt bekannte, allgemein geltende, directe und zuverlässige Methode. Lagrange hat also auch diesen Theil der Mathematik so weit gebracht, als es bis jetzt menschliche Kräfte vermochten.

Der Anordnung nach ist die gegenwärtige Schrift zwar kein systematisches Lehrbuch, sondern vielmehr nur eine Sammlung einzelner, zum Theil nicht einmal mit einander in directer Verbindung stehender, ungleichartiger Abhandlungen; indessen umfasst sie das über ihren

Gegenstand Vorhandene vollständig, und ist zugleich eine vollständige raisonnirende Geschichte desselben.

Der Vortrag ist des Verfassers würdig, und zeugt überall von der bewundernswürdigen Klarheit seiner, den Gegenstand überschauenden Einsicht und von der grossen Kraft seines tief eindringenden Urtheils. Besonders merkwürdig sind in diesem Betracht die Zusätze, und unter diesen der zehnte und dreizehnte.

Umfasst gleich diese Schrift Lagrange's nicht eine ganze Wissenschaft, wie die Theorie der Functionen und die analytische Mechanik, so ist dennoch auch sie ein schönes Muster mathematischer Untersuchungen. Als ein solches wird gewiss auch diese Arbeit des grossen Meisters Jedem, dem Methode wichtig ist und der den Vorzug logischer Forschung vor blindem Suchen und zufälligem Finden, würdigt, lieb und werth seyn.

Die Anmerkungen des Uebersetzers zu diesem Bande beschränken sich fast auf einige Erläuterungen und Erinnerungen. Er hätte seine Bemerkungen zu weit ausdehnen müssen, wenn er alles hätte beifügen wollen, was ihm nöthig schien. Er hat solches um so mehr unterlassen,

da er eine eigene systematische Theorie der Gleichungen abzufassen gedenkt.

Der Text ist, wie in den beiden ersten Bänden, strenge wörtlich übersetzt worden; blos statt einiger unbequemer Buchstaben in den Formeln sind andere gesetzt; zur Erleichterung der Citate gehen jetzt die Paragraphen-Zahlen durch, und den Formeln sind ebenfalls Zahlen gegeben worden.

Berlin im July 1823.

Inhalt

der Theorie der Gleichungen.

Seite

Einleitung 1

Abhandlungen.

Erster Abschnitt. Die ganzzahligen Theile der reellen Wurzeln einer beliebigen numerischen Gleichung zu finden 15

Zweiter Abschnitt. Die gleichen und die unmöglichen Wurzeln der Gleichungen zu finden 49

Dritter Abschnitt. Neue Methode, die Werthe der Wurzeln numerischer Gleichungen Näherungsweise zu finden 57

Vierter Abschnitt. Anwendung der obigen Verfahren auf einige Beispiele 75

Fünfter bschnitt. Von den unmöglichen Wurzeln 88

Erste Abtheilung. Ueber die Mittel, zu erkennen, ob eine Gleichung imaginaire Wurzeln hat 88

Zweite Abtheilung. Kennzeichen der Zahl der unmöglichen Wurzeln, in gewissen Fällen 90

Dritte Abtheilung. Anwendung der obigen Theorie auf die Gleichungen des zweiten, dritten und vierten Grades 101

Seite

Vierte Abtheilung. Ueber die Entwickelung der imaginairen Wurzeln einer Gleichung . 108

Sechster Abschnitt. Ueber die Methode, die Zahlen-Werthe der Wurzeln gegebener Gleichungen durch continuirliche Brüche, näherungsweise zu finden 114

Erste Abtheilung. Von den periodischen Kettenbrüchen 114

Zweite Abtheilung. Einfache Methode, die Wurzeln einer Gleichung zweiter Ordnung durch Kettenbrüche auszudrücken 130

Dritte Abtheilung. Verallgemeinerung der Kettenbrüche 157

Vierte Abtheilung. Verschiedene Mittel, die Berechnung der Wurzeln der Gleichungen durch Kettenbrüche, zu erleichtern 175

Zusätze.

Erster Zusatz. Ueber den Beweis des ersten Lehrsatzes [§. 1.] 201

Zweiter Zusatz. Ueber den Beweis des zweiten Lehrsatzes [§. 2.] 205

Dritter Zusatz. Ueber die Gleichung zwischen den Differenzen der Wurzeln einer gegebenen Gleichung, zu zweien genommen 211

Vierter Zusatz. Ueber das Verfahren, eine Grösse zu finden, welche kleiner ist, als die kleinste Differenz zwischen den Wurzeln einer gegebenen Gleichung 220

Fünfter Zusatz. Ueber die Newtonsche Näherungs-Methode 238

Sechster Zusatz. Ueber das auf rücklaufende Reihen beruhende Näherungs-Verfahren . . . 252

Seite

Siebenter Zusatz. Ueber die Methode, Gleichungen aufzulösen, von Fontaine 267

Achter Zusatz. Ueber die Grenzen der Wurzeln der Gleichungen und die Kennzeichen der Realität der Wurzeln 286

Neunter Zusatz. Ueber die Form der imaginairen Wurzeln 317

Zehnter Zusatz. Ueber die Zerlegung von Polynomen beliebiger Ordnung in reelle Factoren 353

Eilfter Zusatz. Ueber die Näherungs-Ausdrücke für die Wurzeln der Gleichungen . . 388

Zwölfter Zusatz. Ueber die Verwandlung gegebener Gleichungen in solche, deren Glieder, bis auf das gegebene Glied, alle das nämliche Zeichen haben 431

Dreizehnter Zusatz. Ueber die algebraische Auflösung der Gleichungen 443

Vierzehnter Zusatz, welcher die allgemeine Auflösung der Gleichungen mit zwei Gliedern enthält 495

Verzeichniss

einiger bei der Uebersetzung bemerkten Druckfehler des Originals, welche in demselben nicht angezeigt sind.

S. 22 *Z.* 10 *v. u. steht* $y > 0$ *statt* $y > 1$.

— 24 — 7 *v. u. steht dans statt dont.*

— 45 — 12 *v. o. steht* $4 D^3$ *statt* $4^4 D^3$.

— 53 — 17 *v. o. steht* $-\frac{1}{\lambda^\mu + \ldots}$ *statt* $+\frac{1}{\lambda^\mu + \ldots}$.

— 56 — 9 *v. u. steht* $l^{\varrho-2}$ *statt* $l^{\varrho-1}$.

— 67 — 5 *v. u. steht* $\frac{B - {}^{\gamma+2})^2}{\varepsilon^{\gamma+}}$ *statt* $\frac{B-(\varepsilon^{\gamma+2})^2}{\varepsilon^{\gamma+3}}$

— 70 — 4 *v. u. steht* G^μ *statt* G^π.

— 72 — 7 *v. u. steht* $\lambda' < \frac{\sqrt{33+}}{3}$ *statt* $\lambda' < \frac{\sqrt{33+0}}{3}$.

— 85 — 16 *v. u steht* $\frac{n\varrho' - m\varrho'}{\varrho' n}$ *statt* $\frac{n\varrho - m\varrho'}{\varrho' n}$.

— 87 — 2 *v. u. steht* $x = \frac{t+\pi}{t+\pi'}$ *statt* $x = \frac{\varrho t + \pi}{\varrho' t + \pi'}$.

— 95 — 11 *v. u. steht* $\frac{2\left(\frac{\varrho}{\varrho'} - \zeta\right)}{\left(\frac{\varrho}{\varrho'} - \xi\right)^2 - \psi^2}$ *statt*

$$\frac{2\left(\frac{\varrho}{\varrho'} - \zeta\right)}{\left(\frac{\varrho}{\varrho'} - \xi\right)^2 + \psi^2}$$

S. 97 in der unterst. Z. steht $\frac{\mu-1}{f\Delta-1}+\frac{\nu}{f\Pi}=<\frac{1}{2}$

statt $\frac{\mu-1}{f\Delta-1}+\frac{\nu}{f\Pi}=0\,u<\frac{1}{2}$.

— 109 Z. 10 v. o. steht $\alpha^5+\beta^5+\gamma^5+$ etc. $=A$

statt $\alpha^5+\beta^5+\gamma^5+$ etc. $=A_5$.

— 114 — 14 v. o. steht $x=0$ statt $X=0$.

— 122 — 13 v. u. steht x statt X.

— 125 — 12 v. u. steht etc. $+p^m$, statt etc. $+p^m=0$.

— 127 — 6 v. o. steht 1793 statt 1693.

— 135 — 4 v. u. steht a^μ statt α^μ.

— 138 — 7 v. o. steht $+dP'-4c$ statt $+dP'-4e$.

— 140 — 9 v. o. steht 0,1, 0,946 etc. statt 0,1, 0,0946 etc.

— 150 — 5 v. o. steht a, b, c etc. statt a, b, c,

— 161 — 9 v. u. steht celles-ci statt celle-ci.

— 162 — 12 v. o. steht des racines de etc. statt des racines negatives de etc.

— 164 — 20 v. o. steht $Fx\times F'x=y$ statt $Fx\times F''x=y$.

— 166 — 7 v. u. steht $y=2.3X_{,}X_{,,}$ statt $y=2.3X_{,}X_{,,,}$.

— 177 — 3 v. u. steht $-\frac{2^2f''\alpha}{2f'\alpha^2}$ statt $-\frac{i^2f''\alpha}{2f'\alpha^3}$

— 178 — 13 v. u. steht $m+n\sqrt{-}$ statt $m+n\sqrt{-1}$.

— 186 — 2 v. u. scheinen die Worte de la forme $p+q\sqrt{-1}$ wegfallen zu müssen.

— 187 — 11 v. u. steht 14 statt 16.

— 188 — 12 v. u. steht 16 statt 17.

S. 192 Z. 14 v. o. steht $+\alpha\gamma\delta \ldots \times \alpha\gamma\delta$ statt $+\alpha\beta\delta \ldots \times \alpha\gamma\delta$.

— 204 — 7 v. o. steht $\frac{h^{\mu-3}C}{Y} u^3$ statt $\frac{h^{\mu-3}C}{V} u^3$.

— 217 — 12 v. o. steht $\left(\frac{\varphi x \times fu}{u^{n+1}}\right)'$ statt $\left(\frac{\varphi u \times fu}{u^{n+1}}\right)'$

— 221 — 3 v. o. steht $(n-1)\, n\, (2 \cos \omega) +$ statt $(n-1)\, n\, (2 \cos \omega)^{n-1}$.

— 221 — 5 v. o. steht $Q(n\, (2 \cos \omega)^r$ statt $Q(n\, (2 \cos \omega)^n$.

— 223 — 7 v. u. st. $-\frac{na}{b}\left(\frac{b}{c}\right)^{n+1} + \frac{n(n-3)a^2}{2b}\left(\frac{b}{c}\right)^{n-2}$ statt $-\frac{na}{b}\left(\frac{b}{c}\right)^{n-1} + \frac{n(n-3)a^2}{2b^2}\left(\frac{b}{c}\right)^{n-2}$.

— 224 — 6 v. o. steht $\frac{1-f'x}{u-x-fx}$ statt $\frac{1-f'x}{u-x+fx}$

— 226 — 9 v. u. steht $\left(\frac{(\Psi u \times \Pi u')f^2 u}{2}\right)'$ statt $\left(\frac{(\Psi u \times \Pi u)' f^2 u}{2}\right)'$.

— 227 — 2 v. u. steht $(u^n)' \times$ statt $(u^r)' \times$

— 228 — 4 v. o. steht $r = n$ statt $r = -n$.

— 230 — 10 v. u. steht $-\frac{a^{r+4}f}{b^{r+4}}$ statt $-\frac{a^{r+4}f}{b^{r+5}}$.

— 232 — 6 v. o. steht f et F' statt f et F.

— 236 — 7 v. o. steht $\left(\frac{b'}{\beta'}\right) = \frac{Mn-Nm}{M}$ statt $\left(\frac{b'}{\beta'}\right) = \frac{M}{Mn-Nm}$.

— 238 — 8 v. u. steht $b-\varrho < a$ statt $b-\varrho < 0$.

— 240 — 2 v. u. steht $= \frac{5+6y}{1+y}$ statt $\frac{5+6y}{3(1+y)}$.

S. 250 Z. 7 *v. u.* steht (No. 23.) statt (No. 13.).
— 257 — 13 *v. o.* steht au dessus de 3 statt au dessus de 4.
— 263 — 9 *v. u.* steht $\tau' = A^2 \ldots$ statt $\tau = A^2 \ldots$
— 265 — 6 *v. u.* steht $(\xi^0 + \alpha\xi^1 + \alpha^2\xi^4)^3$ statt $(\xi^0 + \alpha\xi^1 + \alpha^2\xi^{11})^2$.
— 266 — 4 *v. u.* steht $-27B =$ statt $-27B^3 =$
— 273 — 10 *u.* 11 *v. u.* fehlt hinter $\frac{1}{m}$ eine Klammer und hinter etc. die entgegengesetzte.
— 283 — 3 *v. o.* steht nous avons dans statt nous avons dit dans.
— 291 — 14 *v. u.* steht $+ \xi'_2 +$ statt $+ \alpha\xi'_2 +$
— 292 — 9 *v. o.* steht No. 10. statt No. 11.
— 306 — 9 *v. u.* steht $r''' = r'^2 \ldots$ statt $r'' = r'^2 \ldots$
— 308 — 3 *v. u.* steht $\xi^0 + \alpha\xi,\ \xi = \ldots$ statt $\xi^0 + \alpha\xi^1,\ \xi^0 = \ldots$
— 309 — 9 *v. u.* steht s par la somme statt s pour la somme.

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

Einleitung.

Die Auflösung jeder bestimmten Aufgabe beruht am Ende auf der Auflösung einer oder mehrerer Gleichungen, deren Coefficienten Zahlen sind, und welche man numerische Gleichungen nennen kann. Es ist daher wichtig, diese Gleichungen vollständig auflösen zu können, von welchem Grade sie auch seyn mögen. Die in den Sammlungen der Memoiren der Berliner Academie vom Jahr 1767 gegebene Auflösungs-Methode ist die einzige, durch welche sich auf directem und sichern Wege alle, sowohl die reellen als imaginairen Wurzeln einer gegebenen numerischen Gleichung finden lassen, und durch welche man sich dem Werthe

der Wurzeln so weit man will, nähern kann. In der gegenwärtigen Abhandlung ist das Memoire über diese Methode mit den Zusätzen im Jahrgange 1768 der Abhandlungen der nemlichen Academie vereinigt worden. Um die Abhandlung noch interessanter zu machen, sind mehrere Bemerkungen hinzugefügt worden, von welchen die beiden letzten in der gegenwärtigen neuen Ausgabe zum erstenmale erscheinen. Diese Bemerkungen enthalten Untersuchungen über die vorzüglichsten Puncte der Theorie der algebraischen Gleichungen.

Man muss die Auflösung numerischer Gleichungen sehr wohl von derjenigen unterscheiden, die man, in der Algebra, allgemeine Gleichungs-Auflösung nennt. Die erste ist eigentlich nichts weiter als eine arithmetische Operation, die zwar im Grunde auf den allgemeinen Principien der Theorie der Gleichungen beruht, deren

Resultate aber nur Zahlen sind, an welchen man die ursprünglichen Zahlen, welche die Elemente der Aufgabe ausmachen, nicht mehr erkennt, und welche keine Spur mehr von den verschiedenen Operationen an sich tragen, durch welche sie gefunden wurden. Die Ausziehung der Quadrat- und Cubic-Wurzeln ist die einfachste Operation dieser Art; sie ist nichts anders als die Auflösung von Gleichungen des zweiten und dritten Grades, deren mittlere Glieder fehlen. Auch würde es gut seyn, die Regeln der Auflösung numerischer Gleichungen schon in die Arithmetik aufzunehmen, mit Vorbehalt des Beweises derjenigen für die Algebra, welche von der allgemeinen Theorie der Gleichungen abhängen.

Newton nennt die Algebra, allgemeine Arithmetik. Diese Benennung ist in gewissem Betrachte sehr angemessen; sie drückt aber den wesentlichen Unterschied zwischen Arithmetik und Al-

gebra nicht aus. Die unterscheidende Eigenschaft der Algebra besteht darin, dass die Resultate ihrer Operationen nicht die individuellen Werthe der gesuchten Grössen geben, wie die Arithmetik oder die geometrischen Constructionen, sondern dass sie blos die arithmetischen oder geometrischen Operationen bezeichnen, welche man mit den gegebenen Grössen vornehmen muss, um die gesuchte Grösse zu finden; ich sage: arithmetische oder geometrische Operationen; denn seit Vieta kennt man die geometrischen Constructionen, vermittelst welcher man mit Linien eben so operiren kann, wie in der Arithmetik mit Zahlen. [*Ein ähnliches Verhältniss, wie zwischen der Arithmetik und Algebra würde zwischen der Algebra und der Functionen-Rechnung Statt finden, und zwar der allgemeinen Functionen-Rechnung, nicht blos derjenigen, welche man auch Differential- und Integral-Rechnung nennt. Die allgemeine Functio-*

nen-Theorie würde ein Inbegriff der Sätze seyn, welche die Operationen andeuten, die die Algebra auszuführen hat. Solche Sätze sind z. B. die Grundgleichungen für die Multiplication und Division, für Potestäten, Logarithmen und Exponential-Grössen, für Facultäten, für allgemeine Entwickelungs-Formen u. s. w. Man sehe über die Behandlung und Entwickelung solcher Grundgleichungen der Functionen-Theorie, beispielsweise, die Abhandlung des Uebersetzers über die allgemeine Entwickelung der Potestäten, Facultäten und Winkel-Functionen. Berlin bei Reimer 1823.]

Die Algebra schwebt gleichsam über der Arithmetik und der Geometrie. Ihr Zweck ist nicht, die Werthe selbst der gesuchten Grössen zu finden, sondern, das System der Operationen, welche man mit den gegebenen Grössen vornehmen muss, um daraus die Werthe der gesuchten Grössen, den Bedingungen der Aufgabe gemäss, zu finden. Das Bild dieser Operationen, durch algebraische

Zeichen dargestellt, ist was man in der Algebra Formel nennt; und wenn eine Grösse von andern Grössen so abhängt, dass sie durch einen Ausdruck dargestellt werden kann, welcher diese Grössen enthält, so nennt man sie Function dieser Grössen. [*Function ist also Ausdruck des Gesetzes der Abhängigkeit der Grössen, und die Theorie der Abhängigkeits-Gesetze wäre die Functionen-Theorie.*]

Die Algebra im weitern Sinne ist die Kunst, unbekannte Grössen durch Functionen bekannter oder als bekannt angenommener Grössen auszudrücken. Die allgemeine Auflösung der Gleichungen besteht darin, für alle Gleichungen eines beliebigen Grades die Functionen der Coefficienten dieser Gleichungen zu finden, welche alle ihre Wurzeln ausdrücken.

Es hat bis jetzt nicht gelingen wollen, dergleichen Functionen weiter als für Gleichungen des zweiten, dritten und vierten Grades zu entdecken; und,

obgleich für diese Grade die Ausdrücke noch alle Wurzeln geben, so haben sie doch schon vom dritten Grade ab eine Form, in welcher es unmöglich ist, durch die blosse Substitution der Coefficienten die Zahlen-Werthe der Wurzeln zu finden, selbst wenn die Wurzeln ganz reel sind. Die Analysten bezeichnen diese Schwierigkeit durch das Wort: Irreductibilität. Sie würde [*wahrscheinlich*] noch um so mehr bei Gleichungen höherer Grade Statt finden, wenn sich dieselben durch allgemeine Ausdrücke auflösen liessen.

Glücklicherweise hat man Mittel gefunden, die Schwierigkeit für den dritten und vierten Grad, durch die Theilung des Winkels in drei Theile und durch trigonometrische Tafeln zu überwinden. Aber dieses, auf der Theilung der Winkel beruhende Mittel ist bei höhern Gleichungen nur sehr beschränkt, und nur auf einzelne Gattungen von Gleichungen anwendbar, und man kann

im Voraus annehmen, [?] dass man, wenn es auch gelänge, die Gleichungen vom fünften und höheren Graden aufzulösen, doch nur Ausdrücke finden würde, die, obgleich an sich sehr schätzbar, zur wirklichen und numerischen Auflösung der Gleichungen wenig brauchbar wären, und durch welche folglich die arithmetischen Methoden, welche den Gegenstand der gegenwärtigen Abhandlung ausmachen, nicht entbehrlich gemacht werden würden.

Vieta ist der Erste, welcher sich mit der Auflösung numerischer Gleichungen von beliebigen Graden beschäftigte. Er zeigte in seiner Abhandlung „de numerosa potestatum adfectarum resolutione," wie man mehrere solche Gleichungen durch Operationen auflösen könne, welche der der Wurzel-Ausziehung ähnlich sind.

Harriot, Ougtred, Pell und Andere haben diese Methode durch besondere Regeln, um in einzelnen,

nach den Zeichen der Glieder der Gleichungen verschiedenen Fällen das Suchen zu vermindern, noch anwendbarer zu machen sich bemüht; aber wegen der Menge der Operationen und der Unsicherheit ihres Erfolges in vielen Fällen hat man diese Regeln aufgegeben.

In der That ist leicht zu sehen, dass die Methode mehr oder weniger nur auf Gleichungen anwendbar seyn kann, deren Glieder, das letzte bekannte Glied ausgenommen, alle einerlei Zeichen haben; denn da alsdann dieses Glied der Summe aller übrigen gleich ist, so kann man allerdings durch eine bestimmte Zahl von Versuchen nach und nach alle Ziffern des Werths der unbekannten Grösse finden, so weit als man will. In allen andern Fällen aber sind die Versuche, wegen der subtractiven Glieder, mehr oder weniger unsicher.

Man müsste, wenn man die Vietasche Methode mit Sicherheit anwenden wollte, durch vorherige Verwandlungen

die Gleichungen immer auf diese Gestalt bringen können. In einer der Anmerkungen (der zwölften) werden wir zeigen, dass die Verwandlung allemal möglich ist, sobald man zwei Grenzen einer Wurzel hat, deren eine grösser, die andere kleiner ist als die gesuchte Wurzel, und welche von der Art sind, dass alle übrigen Wurzeln, so wie die reellen Theile aller imaginairen Wurzeln, wenn es dergleichen giebt, ausserhalb dieser Grenzen liegen. Die Schwierigkeit, diese Grenzen zu finden, ist aber wiederum sehr gross, und kann selbst grösser seyn als die der Auflösung der Gleichung selbst.

Der Vietaschen Methode folgte die Newtonsche, welche eine eigentliche Näherungs-Methode ist, weil sie voraussetzt, dass man schon eine Grösse kenne, die dem wahren Werth der Wurzel bis auf den zehnten Theil derselben nahe kommt. Man substituirt diese Grösse, zusammen genommen mit einer neuen

unbekannten, sattt der unbekannten Wurzel der aufzulösenden Gleichung, und erhält dadurch eine zweite Gleichung, deren Wurzel das ist, was zu der ersten Grösse hinzugefügt werden muss, um den genauen Werth der Wurzel zu finden. Da aber, wegen der vorausgesetzten Kleinheit dieses Restes in d erneuen Gleichung, das Quadrat und die höheren Potenzen der unbekannten Grösse weggelassen werden können, so reducirt sich die neue Gleichung auf eine Gleichung des ersten Grades, aus welcher man den Werth der unbekannten Grösse auf der Stelle findet. Dieser Werth nähert sich aber ebenfalls wieder erst dem wahren Werthe. Man kann sich seiner bedienen, um einen noch genauern Werth zu finden, wenn man mit der zweiten Gleichung von neuem eben so verfährt wie vorhin mit der ersten, u.s.w. Man findet auf diese Weise, durch diese verschiedenen Operationen, Grössen, welche zu den schon gefun-

denen hinzugethan werden müssen und dann die Wurzel der Gleichung um so genauer geben, je öfter man die Operation wiederholt.

Diese Methode ist die gewöhnliche, deren man sich bei der Auflösung numerischer Gleichungen bedient. Sie ist aber, wie man sieht, nur dann anwendbar, wenn die gegebene Gleichung schon näherungsweise aufgelöset ist. Auch ist sie nicht immer sicher; denn da man bei jeder Operation Glieder weglässt, deren Werth man nicht kennt, so ist es nicht wohl möglich, den Grad der Genauigkeit jeder neuen Correction zu beurtheilen; und es kann kommen, dass die Reihe, wenn Wurzeln einer Gleichung beinahe einander gleich sind, nur sehr wenig convergirt, und selbst wieder divergirt, nachdem sie bis zu einem gewissen Puncte convergirt hat. (Man sehe die fünfte Anmerkung.) Endlich hat sie aber auch noch die Unbequemlichkeit, selbst die-

jenigen Wurzeln, welche genau in Zahlen ausgedrückt werden können, nur näherungsweise zu geben, und folglich nicht anzuzeigen, ob die Wurzeln rational oder irrational sind.

Die Aufgabe, welche wir uns jetzt in diesem Theile der Analysis machen wollen, ist folgende: Aus einer gegebenen numerischen Gleichung, ohne alle vorherige Kenntniss der Grösse und Art ihrer Wurzeln, entweder die genauen Werthe aller Wurzeln, wenn es möglich ist, zu finden, oder sich diesen Werthen so weit zu nähern als man will. Diese Aufgabe war noch nicht aufgelöset worden. Sie ist der Gegenstand der folgenden Untersuchungen.

Seit der ersten Ausgabe dieses Werks (vom Jahre 1798) hat man verschiedene Methoden der Auflösung numerischer Gleichungen gegeben; aber die vollständige Auflösung der Aufgabe,

worauf es ankömmt, ist auf demselben Puncte stehen geblieben, wo ich sie gelassen hatte, und bis jetzt ist Nichts gefunden worden, was in allen Fällen, der Untersuchung der Grenzen der kleinsten Differenz der Wurzeln überhöbe, oder dem zur Erleichterung dieser Untersuchung in der vierten Anmerkung angegebenen Verfahren vorzuziehen wäre.

Erster Abschnitt.

Die ganzzahligen Theile der reellen Wurzeln einer beliebigen numerischen Gleichung zu finden.

1.

Erster Lehrsatz.

Wenn man zwei Zahlen kennt, welche, in eine beliebige Gleichung statt der unbekannten Grösse gesetzt, Resultate von entgegengesetzten Zeichen geben, so hat die Gleichung nothwendig wenigstens eine reelle Wurzel, deren Werth zwischen den beiden Zahlen liegt.

[*Beweis.*] Dieser Lehrsatz ist seit langer Zeit bekannt, und man beweiset ihn gewöhnlich durch die Theorie der Curven. Er lässt sich aber auch durch die Theorie der Gleichungen selbst, wie folgt, beweisen.

x sey die unbekannte Grösse der Gleichung; α, β, γ *etc.* mögen die Wurzeln der Gleichung seyn: so lässt sich die Gleichung bekanntlich auf die Form

$$1.\quad (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots. = 0$$

bringen. [*Denn der linkseitige Theil der gegebe-*

Die ganzzahligen Theile der

nen Gleichung, welche z.B. $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots$ $+ M = 0$ *seyn mag, muss für* $x = \alpha$, $x = \beta$, $x = \gamma \ldots$, *und nur für diese Werthe von* x, *verschwinden.*] Nun mögen p und q diejenigen Zahlen seyn, welche, statt x gesetzt, Resultate von entgegengesetzten Zeichen geben, so sind

$$2. \left\{ \begin{array}{l} (p - \alpha)(p - \beta)(p - \gamma) \ldots \text{ und} \\ (q - \alpha)(q - \beta)(q - \gamma) \ldots \end{array} \right.$$

nothwendig Grössen von entgegengesetzten Zeichen. Sie müssen also nothwendig wenigstens zwei Factoren, z. B. $p - \alpha$ und $q - \alpha$, von entgegengesetzten Zeichen haben. [*Denn hätten alle Factoren in den beiden Grössen die nämlichen Zeichen, so hätten auch die Grössen selbst einerlei Zeichen.*] Mithin muss wenigstens eine Wurzel der Gleichung, z. B. α, zwischen p und q liegen, das heisst, kleiner seyn als die grösste der beiden Grössen p und q, und grösser als die kleinste. Dieserhalb ist auch die Wurzel nothwendig reel. [*Denn eine imaginaire Grösse ist weder grösser noch kleiner, als eine reelle Grösse, weil sie eine Grösse ist, die nicht existirt.*]

2.

Erster Zusatz. Sind also die beiden Zahlen p und q nur um eine Einheit, oder um weniger als eine Einheit von einander verschieden, so ist die kleinste von den beiden Zahlen, wenn sie eine ganze ist, oder, wenn sie keine ganze Zahl ist, die nächst kleinere diejenige ganze Zahl, welche einer der Wurzeln der Gleichungen am nächsten kommt [*in so fern*

man

Wurzeln zu finden.

man nemlich voraussetzt, dass die Differenz zwischen der Wurzel und den Zahlen p und q nur positiv genommen werden soll. Sonst kann auch die grössere Zahl der Wurzel näher kommen.] Ist der Unterschied zwischen p und q grösser als die Einheit, so bezeichne man die ganzen Zahlen, welche zwischen p und q fallen, durch n, $n+1$, $n+2$ *etc.* Substituirt man nun, der Reihe nach, statt der unbekannten Grösse, die Zahlen p, n, $n+1$, $n+2$ *etc.* so müssen nothwendig unter den Resultaten zwei auf einander folgende von entgegengesetzten Zeichen seyn. Da nun die Zahlen, welche diese Resultate geben, nur um eine Einheit von einander verschieden sind, so findet man, wie oben, den nächsten ganzzahligen Werth einer der Wurzeln der Gleichung.

3.

Zweiter Zusatz. Jede Gleichung, deren letztes Glied negativ ist, hat, wenn man das erste positiv nimmt, nothwendig eine reelle positive Wurzel, deren nächsten ganzzahligen Werth man finden kann, wenn man statt der unbekannten Grösse alle ganze Zahlen 0, 1, 2, 3.... setzt, so lange, bis man auf zwei Resultate von entgegengesetzten Zeichen kommt.

Denn das erste Glied sey x^m und das letzte $-H$ (wo H eine positive Zahl ist), so erhält man, wenn man $x = 0$ setzt, das negative Resultat $-H$; hingegen, wenn man $x = \infty$ setzt, das positive Resultat ∞^m. Also giebt es zwischen $p = 0$ und $q = \infty$, in welchem Zwischenraum alle ganzen positiven

Die ganzzahligen Theile der

Zahlen liegen, nothwendig eine reelle positive Wurzel (2).

Hieraus folgt:

I. dass jede Gleichung, deren Ordnungs-Zahl ungerade und deren letztes Glied negativ ist, nothwendig eine reelle positive Wurzel haben muss.

II. dass jede Gleichung, deren Ordnungs-Zahl ungerade und deren letztes Glied positiv ist, nothwendig eine reelle negative Wurzel haben muss. Denn setzt man $-x$ statt $+x$, so wird das erste Glied der Gleichung negativ. Verändert man also die Zeichen aller Glieder, um das erste Glied wieder positiv zu machen, so wird das letzte Glied negativ. Also hat die Gleichung alsdann [*zu Folge I.*] eine reelle positive Wurzel; mithin hat die ursprüngliche Gleichung eine reelle negative Wurzel.

III. dass jede Gleichung, deren Ordnungs-Zahl gerade und deren letztes Glied negativ ist, nothwendig zwei reelle Wurzeln haben muss, von welchen die eine positiv, die andere negativ ist. Denn erstlich hat sie eine reelle positive Wurzel [*zu Folge des allgemeinen Satzes* (3.)], dann aber bleibt das erste Glied, wenn man $-x$ statt $+x$ setzt, positiv. Die verwandelte Gleichung hat also ebenfalls eine positive Wurzel, mithin hat die ursprüngliche Gleichung auch noch eine negative Wurzel.

[*Wenn also das erste Glied einer Gleichung immer positiv angenommen wird, so hat eine Gleichung, deren Ordnungs-Zahl ungerade ist, immer eine reelle Wurzel, und zwar eine positive Wurzel,*

Wurzeln zu finden.

wenn ihr letztes Glied negativ, und eine negative Wurzel, wenn ihr letztes Glied positiv ist.

Eine Gleichung deren Ordnungs-Zahl gerade ist, kann ohne alle reelle Wurzeln seyn, wenn das letzte Glied positiv ist. Sie hat aber nothwendig zwei reelle Wurzeln, eine positive und eine negative, wenn das letzte Glied negativ ist.

Noch bestimmter lässt sich dieser Satz so ausdrücken:

Wenn der höchste Exponent der unbekannten Grösse einer beliebigen Gleichung, in welcher aber die unbekannte Grösse nur in Potenzen von ganzen positiven Exponenten vorkommen darf, eine ungerade Zahl ist, so hat die unbekannte Grösse nothwendig wenigstens einen reellen Werth, und zwar einen positiven reellen Werth, wenn die beiden Glieder der Gleichung mit der höchsten und der niedrigsten Potenz der unbekannten Grösse entgegengesetzte Zeichen haben, und einen negativen reellen Werth, wenn diese Glieder gleiche Zeichen haben. Ist der höchste Exponent eine gerade Zahl, so kann die unbekannte Grösse ohne allen reellen Werth seyn, im Fall die beiden Glieder mit den höchsten und niedrigsten Exponenten der unbekannten Grösse gleiche Zeichen haben. Haben diese Glieder ungleiche Zeichen, so hat die unbekannte Grösse nothwendig zwei reelle Werthe, einen positiven und einen negativen Werth.]

Die ganzzahligen Theile der

4.

Anmerkung. Da man die negativen Wurzeln einer Gleichung immer in positive verwandeln kann, indem man nur das Zeichen der unbekannten Grösse ändern darf, so werden wir fortan der Kürze wegen nur die positiven Wurzeln in Betracht ziehen. Soll man also die Wurzel einer gegebenen Gleichung suchen, so sehe man zuerst nur auf die positiven Wurzeln. Verändert man hierauf die Zeichen aller Glieder mit ungeraden Exponenten, so erhält man eine Gleichung, von welcher wiederum nur die positiven Wurzeln gesucht werden dürfen. Die Wurzeln dieser zweiten Gleichung, negativ genommen, sind die negativen Wurzeln der gegebenen.

5.

Zweiter Lehrsatz.

Wenn man in eine beliebige Gleichung mit einer oder mehreren reellen ungleichen Wurzeln, der Reihe nach, statt der unbekannten Grösse zwei Zahlen setzt, deren eine grösser, die andere kleiner ist, als eine der Wurzeln, deren Unterschied aber zugleich kleiner ist als der Unterschied zwischen den nemlichen Wurzeln und jeder andern reellen Wurzel der Gleichung: so geben die beiden Substitutionen nothwendig Resultate von entgegengesetzten Zeichen.

[*Beweis.*] Denn es sey α eine der reellen und

Wurzeln zu finden.

ungleichen Wurzeln der Gleichung; β, γ, δ.... mögen die übrigen reellen Wurzeln seyn; ferner sey ϱ die kleinste der Differenzen zwischen α und den übrigen reellen Wurzeln: so ist klar, dass, wenn z. B. $p > \alpha$, $q < \alpha$ und $p - q < \varrho$ ist, die Grössen $p - \alpha$ und $q - \alpha$ nothwendig entgegengesetzte Zeichen haben, [*denn aus* $p > \alpha$ *und* $q < \alpha$ *folgt* $p - \alpha > 0$ *und* $q - \alpha < 0$, *so dass also die Grösse* $p - \alpha$ *positiv, die Grösse* $q - \alpha$ *negativ ist,*] desgleichen, dass die Grössen $p - \beta$, $p - \gamma$ *etc.* die nämlichen Zeichen haben, wie die correspondirenden Grössen $q - \beta$, $q - \gamma$ *etc.*; denn hätten z. B. $p - \beta$ und $q - \beta$ entgegengesetzte Zeichen, so müsste β zwischen p und q liegen, welches nicht der Fall ist [*weil* α *zwischen* p *und* q *lag und der Unterschied zwischen* p *und* q *kleiner angenommen wurde, als der kleinste der Unterschiede zwischen den Wurzeln, also auch kleiner als der Unterschied zwischen* α *und* β]. Die beiden Producte

$$(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)\ldots\text{ und}$$
$$(q-\alpha)(q-\beta)(q-\gamma)\ldots,$$

das heisst die Resultate der Substitutionen von p und q statt der unbekannten Grösse x (§. 1.), haben also nothwendig entgegengesetzte Zeichen.

6.

Erster Zusatz. Substituirt man also in einer beliebigen Gleichung statt der unbekannten Grösse die, eine arithmetische Reihe bildenden, Zahlen

$$3.\quad 0, \Delta, 2\Delta, 3\Delta, 4\Delta \textit{ etc.}$$

so werden die correspondirenden Resultate eine Reihe geben, welche so viele Zeichenwechsel hat, als die gegebene Gleichung positive ungleiche Wurzeln, deren Differenz aber nicht kleiner ist, als Δ. Setzt man also Δ der kleinsten Differenz zwischen den verschiedenen positiven und ungleichen Wurzeln gleich, oder kleiner als diese Differenz, so hat die Reihe der Resultate nothwendig unbedingt so viele Zeichenwechsel, als die gegebene Gleichung positive und ungleiche Wurzeln hat.

Wäre zugleich die Differenz Δ der Einheit gleich oder kleiner als 1, so würde man auf diese Art näherungsweise den ganzzahligen Werth aller positiven und ungleichen Wurzeln der Gleichung finden. (§. 2.)

Hat die Gleichung nur eine reelle und positive Wurzel, oder sind die Differenzen ihrer reellen und positiven Wurzeln, wenn sie deren mehrere hat, nicht kleiner als Eins, so ist klar, dass man $\Delta = 1$, das heisst, statt der unbekannten Grösse, der Reihe nach, die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3.... setzen kann. Hat dagegen die Gleichung reelle ungleiche Wurzeln, deren Differenzen kleiner als 1 sind, so muss man auch Δ kleiner als 1 und so klein annehmen, dass die kleinste der Differenzen zwischen den Wurzeln gleich, oder grösser als Δ ist. Die ganze Schwierigkeit besteht also darin, den Werth zu finden, welchen man für Δ setzen muss, wenn man versichert seyn will, dass derselbe nicht grösser ist, als die kleinste Differenz zwischen den Wurzeln der gegebenen Glei-

Wurzeln zu finden.

chung; welches der Gegenstand der folgenden Aufgabe ist.

[*In §. 1 wurde bewiesen, dass, wenn die Substitution zweier Zahlen* p *und* q *statt* x, *Resultate von entgegengesetzten Zeichen giebt, nothwendig wenigstens ein reeller Werth von* x *zwischen* p *und* q *liegen muss. Es können aber auch mehrere reelle Werthe von* x *zwischen* p *und* q *liegen; denn, auch wenn mehrere correspondirende Factoren der beiden Grössen*

$$(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)\ldots.$$
$$(q-\alpha)(q-\beta)(q-\gamma)\ldots. \quad (2.)$$

entgegengesetzte Zeichen haben, können die beiden Grössen das Zeichen wechseln. Will man also, dass nur eine reelle Wurzel zwischen p *und* q *falle, so muss nothwendig der Unterschied von* p *und* q *kleiner seyn, als der kleinste der Unterschiede zwischen sämmtlichen reellen Wurzeln. Es folgt also sogleich, dass, wenn man aus dem Zeichenwechsel der Resultate der Substitution einer arithmetischen Reihe von Grössen* $0, \Delta, 2\Delta, 3\Delta\ldots.$ *statt* x, *welcher an und für sich nur die Existenz reeller Wurzeln anzeigt, die Zahl der reellen Wurzeln und sie selbst alle entdecken will, dass dann die Grösse* Δ *nothwendig kleiner seyn muss, als die kleinste der Differenzen der Wurzeln. Dieses ist bis hierher der Inhalt des zweiten Lehrsatzes. Die Untersuchung der Grösse* Δ *ist übrigens ein Hauptgegenstand der Lagrangischen Theorie der Auflösung numerischer Gleichungen.*]

Die ganzzahligen Theile der

7.

Zweiter Zusatz. Jede Gleichung, welche nur einen Zeichenwechsel hat, hat nothwendig auch nur eine reelle positive Wurzel.

[*Unter Zeichenwechsel wird verstanden, dass zwei Glieder der Gleichung verschiedene Zeichen haben. Der gegenwärtige auf die Descartische Regel führende Zusatz ist wohl eigentlich Lehrsatz.*]

Es ist zunächst klar, dass die Gleichung überhaupt nothwendig eine reelle positive Wurzel haben muss, und zwar deshalb, weil ihr letztes und ihr erstes Glied verschiedene Zeichen haben (§. 3.) [*Wenn nemlich die Gleichung nur einen Zeichenwechsel hat, so haben das erste und letzte Glied nothwendig verschiedene Zeichen. Denn sollte das letzte Glied wieder das Zeichen des ersten haben, so müsste in der Gleichung wenigstens noch ein zweiter Zeichenwechsel vorkommen.*] Wir wollen nun zeigen, dass die Gleichung mit einem Zeichenwechsel nur eine reelle positive Wurzel hat.

Es sey, wenn, wie gewöhnlich, das erste Glied positiv angenommen wird, X die Summe aller positiven Glieder der Gleichung, Y die Summe aller negativen Glieder; so lässt sich die Gleichung durch

4. $X - Y = 0$

ausdrücken. Da nun nach der Voraussetzung nur ein Zeichenwechsel Statt findet, so ist klar, dass die Potenzen der unbekannten Grösse x des Polynoms X immer höher als die Potenzen in dem Polynom

Wurzeln zu finden.

Y seyn müssen [*weil das erste Glied, nach der Voraussetzung, die höchste Potenz von x enthält, und die Exponenten vom ersten Gliede bis zum letzten regelmässig abnehmen sollen, so dass die Exponenten der Glieder* hinter *dem einen Zeichenwechsel nothwendig alle kleiner als die Exponenten der Glieder* vor *dem Zeichenwechsel sind*]. Wäre also z. B. x^r die niedrigste Potenz von x in dem Polynom X, und man dividirte X und Y durch x^r, so würde die Grösse $\frac{X}{x^r}$ nothwendig nur Potenzen von x mit positiven Exponenten, $\frac{Y}{x^r}$ hingegen nur Potenzen von x mit negativen Exponenten enthalten; woraus folgt, dass, wenn x wächst, auch $\frac{X}{x^r}$ wachsen, dagegen wenn x abnimmt, auch $\frac{X}{x^r}$ abnehmen muss, in so fern nicht etwa das Polynom X die Potenz x^r allein enthält, in welchem Fall dann $\frac{X}{x^r}$ eine constante Grösse wäre. Die Grösse $\frac{Y}{x^r}$ dagegen wird abnehmen, wenn x wächst, und wachsen, wenn x abnimmt. Es sey a die reelle positive Wurzel der Gleichung, so ist für $x = a$, $X = Y$, also auch $\frac{X}{x^r} = \frac{Y}{x^r}$. Substituirt man also statt x beliebige Zahlen, die grösser sind als a, so ist immer $\frac{X}{x^r} > \frac{Y}{x^r}$ und folglich $X - Y$ immer positiv. Setzt man dagegen für x Zahlen, die kleiner sind als a, so ist immer $\frac{X}{x^r} < \frac{Y}{x^r}$, und folglich $X - Y$ immer ne-

gativ. Also ist es unmöglich, dass die Gleichung reelle positive Wurzeln hat, die grösser oder kleiner als a sind [*weil keine grössere oder kleinere Zahl als a, für x gesetzt, mehr Resultate von entgegengesetzten Zeichen giebt*].

Wenn die Gleichung mehrere Zeichenwechsel hat, so kann sie auch mehrere reelle positive Wurzeln haben; aber die Zahl der reellen positiven Wurzeln kann nie grösser seyn, als die Zahl der Zeichenwechsel. Diesen Lehrsatz nennt man die Regel des Descartes. Man sehe darüber die VIIIte Anmerkung.

8.

Aufgabe. Aus einer gegebenen Gleichung eine andere zu finden, deren Wurzeln die Differenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

[*Auflösung.*] Es sey die Gleichung

$$5.\quad x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + - \ldots = 0$$

gegeben, in welcher bekanntlich die Grösse x alle Wurzeln zugleich bezeichnet. Ist x' irgend eine andere Wurzel dieser Gleichung, so ist auch

$$6.\quad x'^m - Ax'^{m-1} + Bx'^{m-2} - Cx'^{m-3} + - \ldots = 0.$$

Setzt man nun die Differenz der beiden Wurzeln x und x' gleich u, so dass

$$7.\quad x' = x + u,$$

substituirt diesen Ausdruck von x' in die Gleichung (6.) und ordnet die Glieder nach u, so erhält man eine Gleichung nach u von dem nemlichen Grade,

Wurzeln zu finden.

wie die gegebene, welche, wenn man von dem letzten Gliede anfängt, von der Form

$$8.\quad X + Yu + Zu^2 + Vu^3 \ldots + u^m = 0$$

ist, wo die Coefficienten X, Y, $Z\ldots$ auf folgende Weise von x abhängen:

$$9.\begin{cases} X = x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \ldots \\ Y = mx^{m-1} - (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} - \ldots \\ Z = \frac{m.m-1}{2}x^{m-2} - \frac{m-1.m-2}{2}Ax^{m-3} + \ldots \end{cases}$$

etc.

[*Man erhält nemlich, wenn man in die Gleichung* (6.) $x + u$ *statt* x' *setzt,*

$$x^m + mx^{m-1}u + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}u^2 + \ldots$$

$$-A\left(x^{m-1} + (m-1)x^{m-2}u + \frac{(m-1)(m-2)}{2}x^{m-2}u^2 + \ldots\right)$$

$$+B\left(x^{m-2} + (m-2)x^{m-3}u + \frac{(m-2)(m-3)}{2}x^{m-4}u^2 + \ldots\right)$$

$$-C\left(x^{m-3} + (m-3)x^{m-4}u + \frac{(m-3)(m-4)}{2}x^{m-5}u^2 + \ldots\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,$$

woraus man sieht, dass die in (8.) *durch* X, Y, Z, $V\ldots$ *bezeichneten Coefficienten von* u^0, u^1, u^2 *etc. die Werthe* (9.) *haben.*]

Bedient man sich der Zeichen der Differential-Rechnung, so sind die obigen Werthe von Y, Z, $V\ldots$ [(9.) *wie leicht zu sehen*]

$$10.\quad Y = \frac{dX}{dx},\ Z = \frac{d^2X}{2dx^2},\ V = \frac{d^3X}{2.3dx^3}\ldots$$

Da nun vermöge der gegebenen Gleichung (5.) $X = 0$

Die ganzzahligen Theile der

ist, so erhält man, wenn man die vorstehende Gleichung (8.) durch u dividirt,

$$11.\quad Y + Zu + Vu^2 \ldots + u^{m-1} = 0.$$

Setzt man nun in diese Gleichung (11.) für x irgend eine Wurzel der Gleichung (5.), so sind die Wurzeln der neuen Gleichung (11.) die Differenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung (5.). [*Denn die Wurzeln der Gleichung* (11.) *sind die verschiedenen Werthe, welche die Differenz* u *zwischen den Wurzeln der Gleichung* (5.) *z. B.* x *und* x' *haben kann.*] Verbindet man also die Gleichungen (5. und 11.) durch Wegschaffung von x [*welches sie beide enthalten*], so erhält man eine Gleichung mit u allein, deren Wurzeln die Differenzen der Wurzeln der Gleichung (5.) sind. Diese Gleichung mit u ist also die gesuchte Gleichung der Wurzel-Differenzen.

Anstatt aber die Elimination, welche sehr mühsam seyn kann, wirklich auszuführen, darf man nur, wie folgt, verfahren.

I. Wenn α, β, $\gamma \ldots$ die Wurzeln der gegebenen Gleichung mit x (5.) sind, so sind die Wurzeln der Differenzen-Gleichung mit u: $\alpha - \beta$, $\alpha - \gamma \ldots$ $\beta - \alpha$, $\beta - \gamma \ldots$ $\gamma - \alpha$, $\gamma - \beta \ldots$ *etc.* und die Zahl dieser letztern ist $m(m-1)$. [*Denn jede von den* m *Wurzeln* α, β, $\gamma \ldots$ *verbindet sich mit jeder von den übrigen* $m-1$ *Wurzeln.*] Ferner folgt, dass je zwei von diesen Wurzeln einander gleich sind und entgegengesetzte Zeichen haben [*z. B. unter den oben benannten,* $\alpha - \beta$ *und* $\beta - \alpha$ *u. s. w.*].

Wurzeln zu finden.

Die Gleichung in u kann also keine Potenzen von u mit ungeraden Exponenten enthalten [*weil nur Potenzen von* u^2, *nicht von* u *vorkommen*]. Setzt man also

$$12. \quad \frac{m(m-1)}{2} = n \text{ und } u^2 = v,$$

so ist die Differenzen-Gleichung der gegebenen Gleichung (5.) nothwendig von der Form

$$13. \quad v^n - a v^{n-1} + b v^{n-2} - c v^{n-3} \dots = 0.$$

II. Da $(\alpha-\beta)^2$, $(\alpha-\gamma)^2 \dots (\beta-\gamma)^2 \dots$ die verschiedenen Werthe von v in der Gleichung (13.) sind, so ist der Coefficient a die Summe aller dieser Werthe, der Coefficient b die Summe ihrer Producte zu Zweien etc. [*wie bekannt und wie auch unmittelbar folgt, wenn man die Factoren eines Products wie* (1.) *wirklich multiplicirt.*]

Nun ist leicht zu sehen, dass

$$14. \begin{cases} (\alpha-\beta)^2 + (\alpha-\gamma)^2 \dots + (\beta-\gamma)^2 \dots = \\ (m-1)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \dots) - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma \dots + \beta\gamma \dots) \end{cases}$$

[*Denn jedes der Quadrate* α^2, β^2, $\gamma^2 \dots$ *kommt offenbar* $m-1$ *mal vor, weil jede Grösse* α *sich mit den übrigen* $m-1$ *Grössen verbindet.*] Aber aus [*der gegebenen Gleichung*] (5.) ist

$$\alpha\beta + \alpha\gamma \dots + \beta\gamma \dots - = B$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \dots \qquad = A^2 - 2B$$

[*weil der Coefficient* B *zu* x^{m-2} *die Summe der Producte der Wurzeln der Gleichung* $\alpha, \beta, \gamma \dots$ *zu zweien, folglich* $B = \alpha\beta + \alpha\gamma \dots + \beta\gamma \dots$, *der Coefficient* A *zu* x^{m-1} *aber die Summe der Wur-*

Die ganzzahligen Theile der

zeln $\alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots$ *selbst und*

$(\alpha+\beta+\gamma \ldots)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \ldots + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma \ldots 2\beta\gamma \ldots,$

also

$$A^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \ldots + 2B, \text{ oder}$$
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \ldots = A^2 - 2B$$

ist.] Man erhält also [*weil* $a = (\alpha-\beta)^2 + (\alpha-\gamma)^2 \ldots + (\beta-\gamma)^2 \ldots$ *war, vermöge* (14.)] $a = (m-1)(A^2 - 2B) - 2B$, oder

$$15. \quad a = (m-1)A^2 - 2mB.$$

Auf dieselbe Weise könnte man die übrigen Coefficienten [*der Differenzen-Gleichung* (13.)] finden.

Um aber die Entwickelung zu erleichtern, setze man

$$16. \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma \ldots = A_1 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \ldots = A_2 \\ \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \ldots = A_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

so ist, [*weil in der Gleichung* (5.)

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma \ldots &= A \\ \alpha\beta + \alpha\gamma \ldots + \beta\gamma \ldots &= B \\ \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta \ldots + \alpha\gamma\delta \ldots &= C \\ \alpha\beta\gamma\delta \ldots &= D \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned}$$
]

wie bekannt, [*und wie man in jedem guten Lehrbuche Algebra, in dem Abschnitte von den symmetrischen Functionen, z. B. bei Lacroix, Kramp, Meyer-Hirsch etc. nachgewiesen findet*]

$$17. \begin{cases} A_1 = A \\ A_2 = A.A_1 - 2B \\ A_3 = A.A_2 - BA_1 + 3C \\ A_4 = A.A_3 - BA_2 + CA_1 - 4D \text{ etc.} \end{cases}$$

Wurzeln zu finden.

Man setze ferner

$$18.\quad \begin{cases} (\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2\ldots\ldots+(\beta-\gamma)^2\ldots\ldots=a_1\\ (\alpha-\beta)^4+(\alpha-\gamma)^4\ldots\ldots+(\beta-\gamma)^4\ldots\ldots=a_2\\ (\alpha-\beta)^6+(\alpha-\gamma)^6\ldots\ldots+(\beta-\gamma)^6\ldots\ldots=a_3\end{cases}$$

. ,

so ist leicht zu sehen, dass

$$a_1=(m-1)A_2-2\,\frac{(A_1)^2-A_2}{2}$$

$$a_2=(m-1)A_4-4(A_1.A_3-A_4)-6\,\frac{(A_2)^2-A_4}{2}$$

$$a_3=(m-1)A_6-6(A_1.A_5-A_6)-15(A_2A_4-A_6)-20\,\frac{(A_3)^2-A_6}{2}$$

etc.,

oder

$$19.\quad \begin{cases} a_1=mA_2-2\,\dfrac{(A_1)^2}{2}\\ a_2=mA_4-4A_1A_3+6\,\dfrac{(A_2)^2}{2}\\ a_3=mA_6-6A_1A_5+15A_2A_4-20\,\dfrac{(A_3)^2}{2}\\ \quad etc.\\ \text{und allgemein}\\ a_\mu=mA_{2\mu}-2\mu A_1A_{2\mu-1}\\ \qquad+\dfrac{2\mu(2\mu-1)}{2}A_2A_{2\mu-2}-\ldots\\ \qquad\pm\dfrac{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)\ldots(\mu+1)}{1.2.3\ldots\mu}\cdot\dfrac{(A_\mu)^2}{2}.\end{cases}$$

Nachdem auf diese Weise die Grössen $a_1\ a_2\ a_3\ldots$ gefunden sind, erhält man ohne Weiteres die Werthe der Coefficienten $a, b, c\ldots$ der Gleichung (13.) vermittelst der Ausdrücke

Die ganzzahligen Theile der

$$20.\quad \begin{cases} a = a_1 \\ b = \dfrac{a a_1 - a_2}{2} \\ c = \dfrac{b a_1 - a a_2 + a_3}{3} \\ d = \dfrac{c a_1 - b a_2 + a a_3 - a_4}{4} \end{cases}$$

etc. [*Alles Dieses findet man näher in ausführlicheren Lehrbüchern der Algebra, besonders bei Meyer Hirsch, Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Gleichungen,* 1*ster Theil §.* 44. *S.* 76. *seq..*]

Man kann also direct die Coefficienten $a, b, c \ldots$ der Differenzen-Gleichung (13.) aus den Coefficienten $A, B, C \ldots$ der gegebenen Gleichung (5.) finden. Zuerst nemlich suche man vermittelst der Ausdrücke (17.) die Werthe der Grössen A_1, A_2, $A_3 \ldots$ bis zu A_{2n}, und hierauf vermittelst der Ausdrücke (19.) die Werthe der Grössen a_1, $a_2 \ldots$ bis a_n. Aus diesen findet man vermittelst der Ausdrücke (20.) die gesuchten Werthe der Coefficienten a, b, $c \ldots$ [*Die Differenzen-Gleichung oder die Gleichung mit u, folglich auch die Gleichung* (13.) *mit v, lässt sich also ohne die oben erwähnte mühsame Elimination von x zwischen den Gleichungen* (5. *und* 11.) *unmittelbar aufstellen. Sie ist von der Ordnung* $\dfrac{m(m-1)}{2}$.]

9. An-

Wurzeln zu finden.

9.

Anmerkung. Es ist zu bemerken, dass die Gleichung (13.) auch eben so wohl die Differenzen zwischen den positiven und negativen Wurzeln der Gleichung (5.) ausdrückt, so dass die nämliche Gleichung auch Statt findet, wenn man $-x$ statt $+x$ setzt, um die negativen Wurzeln zu finden (§. 4.).

Sodann ist klar, dass die Gleichung (13.) immer die nämliche bleibt, wenn man auch alle Wurzeln der gegebenen Gleichung (5.) um irgend eine Grösse vermehrt. [*Denn die Differenzen der Wurzeln bleiben offenbar dieselben, wenn man alle Wurzeln um Gleichviel vermehrt.*] Hat also die gegebene Gleichung (5.) etwa ein zweites Glied, so kann man solches erst wegschaffen, und dann die Gleichung (13.) suchen. [*Das Wegschaffen des zweiten Gliedes ist bekanntlich durch Hinzufügung einer verhältnissmässigen Grösse zu allen Wurzeln, namentlich, in der Gleichung (5.) durch Hinzufügung der Grösse $-\frac{1}{m}A$ zu x, allemal möglich; denn setzt man z. B. $x-\frac{A}{m}=y$, so ist $x=y+\frac{A}{m}$, und die Gleichung (5.) geht in*

$$y^m+\frac{mAy^{m-1}}{m}+\frac{m.\overline{m-1}}{2}\frac{A^2}{m^2}y^{m-2}\ldots$$

$$-A\left(y^{m-1}+\overline{m-1}\frac{A}{m}y^{m-2}\ldots\right)$$

$$+B(y^{m-2}\ldots)=0,$$

oder in

Die ganzzahligen Theile der

$$y^m + \left(\frac{m-1}{2m}A^2 - \frac{m-1}{m}A + B\right)y^{m-2} \ldots = 0$$

über, in welcher Gleichung das zweite Glied fehlt.] Man wird [*weil die Differenzen unverändert dieselben bleiben*] ganz die nämliche Gleichung in v finden, als wenn das zweite Glied noch da wäre; aber das Verschwinden des zweiten Gliedes erleichtert um etwas die Entwickelung der Coefficienten a, b, c.... weil jetzt [*in der verwandelten Gleichung ohne zweites Glied*] $A = 0$ und folglich $A_1 = 0$ ist (17.), so dass in (17.) blos

$$21.\quad \begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = -2B \\ A_3 = \quad 3C \\ A_4 = -BA_2 - 4D \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

ferner in (19.)

$$22.\quad \begin{cases} a_1 = mA_2 \\ a_2 = mA_4 + 6\dfrac{(A_2)^2}{2} \\ a_3 = mA_6 + 15A_2A_4 - 20\dfrac{(A_3)^2}{2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

und in (20.)

$$23.\quad \begin{cases} a = a_1 \\ b = \dfrac{aa_1 - a_2}{2} \\ c = \dfrac{ba_1 - aa_2 + a_3}{3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

ist.

Wurzeln zu finden.

[*Die Erleichterung findet nur mehr Statt, wenn man in Zahlen rechnet. Behält man für die Coefficienten die Buchstaben bei, so ist sie geringer, weil man am Ende für a, b, c auf beiden Wegen die nämlichen Werthe finden muss.*]

10.

Erster Zusatz. Da die Wurzeln der Gleichung (13.) die Quadrate der Differenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung (5.) sind, so ist klar, dass im Fall alle Glieder der Gleichung (13.) das nämliche Zeichen haben, in welchem Fall keine reelle positive Wurzel Statt findet, [*§. 3. III.*] dass dann die Differenzen der gegebenen Gleichung (5.) alle imaginair sind, so dass diese Gleichung alsdann entweder nur eine oder nur gleiche reelle Wurzeln haben könnte. In dem letzten Falle kann man dieselben erkennen und durch die bekannte Methode finden. (Man sehe weiter unten den zweiten Abschnitt.) Im ersten Falle folgt aus (§. 6.) dass man $\Delta = 1$ setzen kann. [*Denn wenn nur eine reelle Wurzel vorhanden ist, so kann man keine zweite Wurzel, etwa mit einer zu gross angenommenen Differenz, übergehen, folglich diese Differenz alsdann willkürlich, und folglich auch gleich Eins setzen.*]

11.

Zweiter Zusatz. Wenn die gegebene Gleichung (5.) eine oder mehrere Paare gleicher Wur-

Die ganzzahligen Theile der

zeln hat, so ist klar, dass eine oder mehrere Wurzeln der Differenzen-Gleichung (13.) Null seyn müssen, [*denn die Differenzen gleicher Grössen sind Null,*] so dass also dann die Gleichung (13.) ein- oder mehrmal durch v muss dividirt werden können. Die Gleichung, welche man nach der Division erhält, im Fall eine solche Statt findet, sey

$$24.\quad 1 + \alpha v + \beta v^2 + \gamma v^3 \ldots\ldots + \pi v^r = 0,$$

wo r entweder gleich oder kleiner als n [*in* 13.] ist. Setzt man hier

$$25.\quad v = \frac{1}{y}$$

und ordnet die Gleichung nach y, so erhält man

$$26.\quad y^r + \alpha y^{r-1} + \beta y^{r-2} + \gamma y^{r-3} \ldots\ldots + \pi = 0.$$

Man suche durch die bekannte Methode die Grenzen der positiven Wurzeln dieser Gleichung. Sie sey l, so dass l grösser ist, als irgend ein positiver Werth von y, so ist $\frac{1}{l}$ kleiner als irgend ein positiver Werth von $\frac{1}{y}$ oder v, folglich kleiner als jeder Werth von u^2, weil $v = u^2$ war (12.). Die Grösse $\frac{1}{\sqrt{l}}$ ist also nothwendig kleiner als irgend ein Werth von u, das heisst, kleiner als irgend eine Differenz zwischen den reellen und ungleichen Wurzeln der gegebenen Gleichung (5.).

I. Ist also $\sqrt{l} < 1$, so ist man sicher, dass die Gleichung (5.) keine reelle Wurzeln hat, deren Differenzen kleiner sind, als 1. Man kann also in diesem Falle ohne Bedenken $\Delta = 1$ setzen (§. 6.).

Wurzeln zu finden.

II. Ist dagegen $\sqrt{l}$ gleich oder grösser als Eins, so kann die gegebene Gleichung (5.) Wurzeln haben, deren Differenzen kleiner als 1 sind. Da aber die kleinste Differenz der Wurzeln immer nothwendig grösser als $\frac{1}{\sqrt{l}}$ ist, so kann man immer Δ gleich oder kleiner als $\frac{1}{\sqrt{l}}$ annehmen (§. 6.).

Ueberhaupt kann man, wenn k diejenige ganze Zahl ist, welche der Grösse $\sqrt{l}$ gleich ist, oder unmittelbar auf sie folgt, immer

$$27. \quad \Delta = \frac{1}{k}$$

setzen. [*Auf diese Weise, nemlich durch die Differenzen-Gleichung* (13.), *lässt sich also direct finden, wie klein man* Δ *oder die Differenz der arithmetischen Reihe von Grössen, die man statt* x *setzen will, um sich dem Werthe von* x *zu nähern, annehmen muss, um sicher zu seyn, dass man keine reelle Wurzel übergehe.*]

12.

Erste Anmerkung. Was die Mittel, die Grenzen der Wurzeln einer Gleichung zu finden, betrifft, so ist das bequemste und sicherste dasjenige von Newton, welches darin besteht, diejenige Zahl zu suchen, welche, von den Wurzeln der gegebenen Gleichung abgezogen, diese Gleichung in eine andere verwandelt, welche keinen Zeichenwechsel mehr hat. Denn da alsdann diese Gleichung nur noch negative Wurzeln haben kann, so muss die abgezogene Zahl

Die ganzzahligen Theile der

nothwendig grösser seyn, als die grösste Wurzel der gegebenen Gleichung.

Um also die Grenze l der Wurzeln der Gleichung

$$28. \quad y^r + \alpha y^{r-1} + \beta y^{r-2} + \gamma y^{r-3} \ldots\ldots = 0 \ (26.)$$

zu finden, setze man $y + l$ statt y und ordne die entstehenden Glieder nach y, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$29. \quad P + Qy + Ry^2 + Sy^3 \ldots\ldots + y^r = 0,$$

in welcher

$$30. \quad \begin{cases} P = l^r + \alpha l^{r-1} + \beta l^{r-2} + \gamma l^{r-3} \ldots\ldots + \pi \\ Q = r l^{r-1} + (r-1)\alpha l^{r-2} + (r-2)\beta l^{r-3} \ldots\ldots \\ R = \frac{r(r-1)}{2} l^{r-2} + \frac{(r-1)(r-2)}{2} \alpha l^{r-3} \ldots\ldots \\ S = \frac{r(r-1)(r-2)}{2 \cdot 3} l^{r-3} + \ldots\ldots \end{cases}$$

etc. ist.

[*Diese Grössen lassen sich, wie leicht zu sehen, durch ein ähnliches Verfahren wie* §. 8. *auch durch Ableitungen ausdrücken.*]

Man darf nun nur denjenigen Werth von l suchen, welcher, in P, Q, R.... gesetzt, diese Grössen sämmtlich positiv macht. Fängt man von der letzten an, welche nur zwei Glieder hat, und geht zu der vorhergehenden zurück, so lässt sich leicht die kleinste ganze Zahl finden, welche statt l gesetzt werden kann, und welche die nächste Grenze ist.

Will man alles Probiren vermeiden, so darf man nur den grössten Coefficienten der negativen Glieder der Gleichung (28.), um 1 vergrössert, für l anneh-

men: denn es ist leicht zu beweisen, dass, wenn man der Grösse l diesen Werth giebt, die Grössen P, Q, R.... immer positiv sind.

Dieses Mittel, die Grenzen der Wurzeln einer beliebigen Gleichung zu finden, ist, wie ich glaube, von Maclaurin. Folgendes Mittel giebt zuweilen noch engere Grenzen.

Die negativen Glieder der Gleichung (28.) mögen

$$31. \quad -\mu y^{r-m} - \nu y^{r-n} - \pi y^{r-p} \ldots\ldots$$

seyn, so nehme man für l die Summe zweier von den grössten der Grössen $\sqrt[m]{\mu}$, $\sqrt[n]{\nu}$, $\sqrt[p]{\pi}$.... oder irgend eine ganze Zahl, welche grösser ist, als diese Summe. Dieser Satz kann auf eine ähnliche Art bewiesen werden, wie der vorige. [*Man findet Näheres darüber in den Lehrbüchern.*]

Uebrigens ist aber zu bemerken, dass die auf die eine oder die andere der beiden vorigen Arten gefundenen Grenzen selten die nächsten sind. Um nähere zu haben, versuche man für l kleinere Zahlen, und nehme die kleinste, welche der Bedingung genugthut, dass P, Q, R.... (30.) positive Zahlen seyn sollen.

13.

Zweite Anmerkung. Hat man die Grenze l der Wurzeln der Gleichung (26.) gefunden, und alsdann k gleich oder nächst grösser als $\sqrt{l}$ gesetzt (§. 11.), so ist $\Delta = \frac{1}{k}$ (27.), und man kann nun in die gegebene Gleichung (5.), der Reihe nach, die Zah-

Die ganzzahligen Theile der

len $0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \frac{3}{k} \ldots$ statt der unbekannten Grösse x substituiren. Die Resultate dieser Substitutionen werden eine Reihe von Grössen geben, welche so viele Zeichenwechsel hat, als die gegebene Gleichung reelle, positive und ungleiche Wurzeln; desgleichen muss jede Wurzel nothwendig jedesmal zwischen den zwei aufeinander folgenden Zahlen liegen, deren correspondirende Resultate das Zeichen wechseln, so dass, wenn z. B. die Zahlen $\frac{h}{k}$ und $\frac{h+1}{k}$ Resultate von verschiedenen Zeichen geben, nothwendig eine Wurzel zwischen $\frac{h}{k}$ und $\frac{h+1}{k}$ liegen muss. Diejenige ganze Zahl, welche der Grösse $\frac{h}{k}$ am nächsten kommt, ist folglich die nächste an dieser Wurzel (§. 2.).

Man findet also auf diese Weise nicht allein die Zahl der positiven und ungleichen Wurzeln der gegebenen Gleichung, sondern auch diejenigen ganzen Zahlen, welche diesen Wurzeln am nächsten kommen.

Zur Erleichterung und Abkürzung der Rechnung dient noch Folgendes.

Erstlich, wenn man nach der obigen Methode die Grenzen der positiven Wurzeln der gegebenen Gleichung sucht, so ist es offenbar nicht nöthig, etwas Grösseres als die Grenzen für die unbekannte Grösse zu setzen. Denn, wie leicht zu sehen, erhält man alsdann immer nur Resultate, die nothwendig positiv sind. Ist also λ die Grenze, so ist die Zahl

Wurzeln zu finden.

der nöthigen Substitutionen nie grösser als λk, und folglich immer begrenzt.

In der That darf man auch nur, ohne die Grenze λ zu suchen, die Substitutionen so lange fortsetzen, bis das erste Glied der Gleichung oder die Summe der ersten Glieder, wenn mehrere Glieder mit dem Zeichen + vorhanden sind, gleich oder grösser als die Summe der negativen Glieder ist: denn es ist nach §. 7. leicht zu zeigen, dass, wenn man noch Grösseres für die unbekannte Grösse setzt, die Resultate immer positiv sind.

Zweitens. Anstatt für die unbekannte Grösse x die Brüche $\frac{1}{k}$, $\frac{2}{k}$ *etc.* zu setzen, kann man sogleich $\frac{x}{k}$ statt x setzen, oder, was das Nämliche ist, den Coefficienten des zweiten Gliedes mit k, den Coefficienten des dritten Gliedes mit k^2 u. s. w. multipliciren. [*Nämlich, wenn man in die Gleichung* $x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} \ldots\ldots = 0$, $\frac{x}{k}$ *statt* x *setzt, so erhält man* $\frac{x^m}{k^m} - A\frac{x^{m-1}}{k^{m-1}} + B\frac{x^{m-2}}{k^{m-2}} \ldots\ldots = 0$, *oder, wenn man mit* k^m *multiplicirt,*

$$x^m - kA.x^{m-1} + k^2B.x^{m-2} \ldots\ldots = 0,$$

in welcher Gleichung, wie man sieht, der Coefficient des zweiten Gliedes mit k, *der Coefficient des dritten Gliedes mit* k^2 *u. s. w. multiplicirt ist.*] Hierauf kann man die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, bis zu der Grenze der Gleichung, oder

so weit bis das erste Glied der Gleichung positiv, oder die Summe ihrer positiven Glieder gleich oder grösser als die Summe der negativen Glieder ist, statt x setzen. Auf diese Weise sind die Resultate [*für die Grenzen der Wurzeln*] blos ganze Zahlen, und die Wurzeln der gegebenen Gleichung selbst liegen nothwendig zwischen denjenigen ganzen Zahlen, welche Resultate von entgegengesetzten Zeichen geben, wenn man diese Zahlen durch k dividirt, wie wir oben sahen.

Drittens. Der Grad der Gleichung, in welche man der Reihe nach die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3.... statt der unbekannten Grösse setzen soll, sey m; so lassen sich aus den $m+1$ ersten Resultaten, das heisst aus denen, welche zu $x = 0, 1, 2, 3 \ldots m$ gehören, alle folgenden blos durch Addition finden.

Man darf nämlich nur die Differenzen der gefundenen Resultate nehmen, deren Zahl m ist, von diesen wiederum die Differenzen, deren Zahl nur $m - 1$ ist, und so weiter bis zur mten Differenz. Diese letzte Differenz ist nothwendig constant, weil der Exponent der höchsten Potenz der unbekannten Grösse m ist. [*Bekanntlich ist die mte Differenz der Potenzen* 0^m, 1^m, 2^m, 3^m.... *oder überhaupt der Potenzen* a^m, $(a+k)^m$, $(a+2k)^m$, $(a+3k)^m$.... *constant.*] Man kann also die Reihe der mten Differenzen blos durch Wiederholung der Differenz so weit fortsetzen, als man will. Hierauf kann man, ebenfalls durch blosse Addition, die Reihe der $m-1$ten

Wurzeln zu finden.

Differenzen, und mittelst dieser die Reihe der $m-2$ten Differenzen u. s. w. so weit fortsetzten als man will, bis man zu der ersten Reihe kommt, welche die Reihe der gesuchten Resultate ist.

Wären alle correspondirenden Glieder der verschiedenen Differenzen-Reihen positiv, so wären es auch die folgenden Glieder jeder Reihe. Da nun aber die letzte Differenz immer positiv ist, so ist klar, dass man nothwendig in jeder Reihe endlich auf positive Glieder kommen muss; man darf also alle diese Reihen nur so lange fortsetzen, bis ihre correspondirenden Glieder alle positiv sind, weil man alsdann versichert ist, dass die Resultate, so weit man will fortgesetzt, immer positiv sind und dass die Reihe folglich keinen Zeichenwechsel mehr hat.

Um dieses durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir die Gleichung

$$32.\quad x^3 - 63x + 189 = 0$$

nehmen, so sind die zu $x = 0$, 1, 2 und 3 gehörigen Resultate, 189, 127, 71 und 27 [*nemlich* $x = 0$ *gesetzt*, *giebt* $189 = 189$, $x = 1$ *giebt* $1 - 63 + 189 = 127$, $x = 2$ *giebt* $8 - 126 + 189 = 71$, *und* $x = 3$ *giebt* $27 - 189 + 189 = 27$.] Dieses giebt für die ersten Differenzen [$127 - 189 =$] -62, [$71 - 127 =$] -56, [$27 - 71 =$] -44. Die zweiten Differenzen sind [$-56 - 62 =$] 6 und [$-44 + 56 =$] 12. Die dritten Differenzen sind 6. Man hat also folgende vier Reihen:

Die ganzzahligen Theile der

6	6	6	6	6	6	6	*etc.*
6	12	18	24	30	36	42	*etc.*
—62	—56	—44	—26	—2	+28	+64	*etc.*
189	127	71	27	1	—1	+27	*etc.*

in welchen jedes Glied gleich der Summe des vorhergehenden Gliedes der nämlichen und des darüber stehenden der vorhergehenden Reihe ist; so dass sich die Reihen leicht so weit fortsetzen lassen als man will. [*In einer Gleichung dritten Grades ist die dritte Differenz immer* 6, *überhaupt in einer Gleichung des mten Grades immer* $m(m-1)(m-2)\ldots 1$, *ohne Rücksicht auf die Coefficienten der Glieder der Gleichung ausser dem ersten, weil die Differenzen der Glieder mit niedrigern Exponenten eher verschwinden, als die Differenzen des ersten Gliedes, und es folglich nur auf die mte Differenz von* x^m *ankommt, welche* $m.m-1.m-2\ldots 1$ *ist.*]

Die letzte der obigen vier Reihen ist, wie man sieht, diejenige der Resultate der Substitution der natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3.... statt x in die gegebene Gleichung, und da die Glieder der siebenten [*senkrechten*] Columne, nemlich 6, 42, 64, 27 alle positiv sind, so sind es alle folgende Glieder ebenfalls [*weil sie Summen positiver Grössen sind*], so dass die Reihe der Resultate, so weit fortgesetzt als man will, keinen Zeichenwechsel mehr hat.

14.

Bemerkung. Man hatte schon früher bemerkt, dass man näherungsweise die Werthe aller reellen

Wurzeln zu finden.

und ungleichen Wurzeln einer beliebigen Gleichung finden könne, wenn man, der Reihe nach, verschiedene in einer arithmetischen Reihe fortlaufende Zahlen statt der unbekannten Grösse substituirt; aber diese Bemerkung war nur von geringem Nutzen, weil es noch an Mitteln fehlte, diejenige Reihe der zu substituirenden Zahlen für jeden besondern Fall zu finden, bei welcher man sicher ist, dass man alle reelle und ungleiche Wurzeln der gegebenen Gleichung berührt. Dieses Mittel haben wir durch Auflösung der Aufgabe §. 8. erreicht. Weiter unten werden wir noch andere Anwendungen dieser Aufgabe auf die gleichen und unmöglichen Wurzeln sehen.

Uebrigens würde die Untersuchung der Grösse Δ §. 11. nicht nöthig seyn, wenn die gegebene Gleichung lauter reelle Wurzeln hätte; dagegen hängen die Bedingungen, an welchen man im voraus die Realität aller Wurzeln einer Gleichung, im Fall sie statt findet, erkennt, von der Differenzen-Gleichung oder von ähnlichen Ausdrücken ab. (Man sehe die achte Anmerkung.)

[*Im Wesentlichen also ist die Lagrangische Auflösungs-Methode numerischer Gleichungen eine Ergänzung der gewöhnlichen Näherungs-Methode, vermöge welcher man für die unbekannte Grösse, der Reihe nach, äquidifferente Zahlen setzt, so lange bis man auf Resultate von entgegengesetzten Zeichen kommt und daraus sieht, dass zwischen den Werthen der beiden für x vorausge-*

Die ganzzahligen Theile der

setzten Zahlen, welche Resultate von entgegengesetzten Zeichen geben, reelle Wurzeln liegen.

Diese gewöhnliche Methode ist unzulänglich, weil es, wenn man den Unterschied der äquidifferenten Zahlen willkürlich annimmt, seyn kann, dass zwei oder mehrere reelle Wurzeln der Gleichung so nahe zusammen liegen, dass man sie mit der Differenz übergeht. Lägen alsdann z. B. zwei reelle Wurzeln zwischen zwei auf einander folgenden äquidifferenten Zahlen, so entdeckt oder bemerkt man sie auf diese Weise nicht, weil jede Wurzel einen Zeichenwechsel erfordert und zwei Zeichenwechsel also das Zeichen wieder herstellen. Es sey z. B. die Gleichung

$$x^2 - 5x + 6\tfrac{3}{16} = 0$$

gegeben. Setzt man hierin für x der Reihe nach die äquidifferenten Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 *etc., so erhält man*

$$\begin{aligned} 0 - 0 + 6\tfrac{3}{16} &= +6\tfrac{3}{16} \\ 1 - 5 + 6\tfrac{3}{16} &= +2\tfrac{3}{16} \\ 4 - 10 + 6\tfrac{3}{16} &= +\tfrac{3}{16} \\ 9 - 15 + 6\tfrac{3}{16} &= +\tfrac{3}{16} \\ 16 - 20 + 6\tfrac{3}{16} &= +2\tfrac{3}{16} \end{aligned}$$

u. s. w., wo in der Reihe der Resultate kein Zeichenwechsel ist. Gleichwohl hat die Gleichung die beiden reellen Wurzeln $2\tfrac{1}{4}$ *und* $2\tfrac{3}{4}$, *die man also durch diese Methode nicht entdeckt. Man musste diese beiden Wurzeln nothwendig übergehen, weil sie beide zwischen* 2 *und* 3 *liegen und also von* 2 *bis* 3 *zwei Zeichenwechsel statt finden,*

Wurzeln zu finden.

die das Zeichen + wieder herstellen. Hätte man Statt der Zahlen 0, 1, 2, 3.... *die Zahlen* 0, $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3.... *gesetzt, so hätte man z. B. für* 2, $2\frac{1}{2}$ *und* 3

$$4 - 10 + 6\tfrac{3}{16} = + \tfrac{3}{16}$$
$$6\tfrac{1}{4} - 12\tfrac{1}{2} + 6\tfrac{3}{16} = - \tfrac{3}{16}$$
$$9 - 15 + 6\tfrac{3}{16} = + \tfrac{3}{16}$$

gefunden, welches allerdings zwei Zeichenwechsel hat, und die beiden reellen Wurzeln richtig anzeigt. Die gewöhnliche Auflösungs-Methode, willkürlich eine Reihe äquidifferenter Zahlen statt x *zu setzen, ist also nicht sicher und folglich nicht zulänglich.*

Diese Methode nun ergänzt L a g r a n g e *dadurch, dass er lehrt, denjenigen Unterschied der äquidifferenten Zahlen zu finden, mit welchen man sicher ist, keine reelle Wurzel zu* ü b e r g e h e n. *Dieser Unterschied ist offenbar eine Zahl, welche kleiner ist als der kleinste Unterschied zwischen zwei Wurzeln der gegebenen Gleichung. Es kommt also nur darauf an, aus der gegebenen Gleichung eine andere aufzustellen, deren Wurzeln die Unterschiede der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind. Dieses geschieht im §.* 8. *und ist* i m m e r *möglich. Die Differenzen-Gleichung ist, wenn die gegebene Gleichung auf den* m*ten Grad steigt, von dem Grade* $\frac{m.(m-1)}{2}$. *Wäre es nöthig, die Differenzen-Gleichung selbst völlig aufzulösen, so wäre durch dieselbe Nichts gewonnen, weil*

Die ganzzahl. Theile der Wurzeln zu find.

sie auf einen noch höhern Grad steigt, als die gegebene. Dieses aber ist nicht der Fall. Es schadet offenbar nicht, wenn man für den gesuchten Unterschied der in die gegebene Gleichung für x zu setzenden äquidifferenten Zahlen auch eine kleinere Zahl annimmt als nöthig ist, denn man übergeht dann eine reelle Wurzel um so weniger. Es kommt also nicht darauf an, die Differenzen-Gleichung wirklich aufzulösen, sondern nur, die Grenze zu finden, unter welcher keine reelle Wurzel der Differenzen-Gleichung liegen kann, das heisst, eine Zahl, welche kleiner ist als die kleinste ihrer Wurzeln. Dieses ist wiederum immer möglich, nach der Newtonschen Methode, oder einer andern. Die Lagrangische Ergänzung der gewöhnlichen Auflösungs-Methode ist also wirklich vollständig und macht die Näherung vollkommen sicher.]

Zweiter

Zweiter Abschnitt.

Die gleichen und die unmöglichen Wurzeln der Gleichungen zu finden.

15.

In dem vorigen Abschnitte sahen wir blos auf die reellen ungleichen Wurzeln der gegebenen Gleichung (5.). Wir wollen jetzt annehmen, die gegebene Gleichung habe gleiche Wurzeln. [*Unter ungleichen Wurzeln werden Werthe von x verstanden, welche x in der gegebenen Gleichung nur einmal, unter gleichen Wurzeln Werthe von x, welche diese Grösse mehrere male haben kann.*] In diesem Falle muss nothwendig die Differenzen-Gleichung (13.) so viel mal durch v theilbar seyn, als Combinationen der gleichen Wurzeln zu zweien möglich sind; mithin müssen alsdann in der Differenzen-Gleichung (13.) nothwendig eben so viele letzte Glieder fehlen, woran sich erkennen lässt, wie viele gleiche Wurzeln die gegebene Gleichung hat. [*Wenn nemlich die gegebene Gleichung gleiche Wurzeln hat, so sind die Differenzen dieser gleichen Wurzeln nothwendig Null; mithin müssen so viele Wurzeln der Differenzen-Gleichung*

Die gleichen und unmöglichen

Null seyn, als es Combinationen der gleichen Wurzeln zu zweien giebt. Wenn aber z. B. n Wurzeln dieser letzten Gleichung Null sind, so muss die Gleichung nothwendig eben so viel mal durch die unbekannte Grösse theilbar seyn. Dieses ist wiederum nicht anders möglich, als wenn die letzten Glieder bis zu demjenigen mit x^n *fehlen. Mithin müssen, wenn die gegebene Gleichung gleiche Wurzeln hat, in ihrer Differenzen-Gleichung so viel letzte Glieder fehlen, als Combinationen der gleichen Wurzeln der gegebenen Gleichung zu zweien gemacht werden können.*]

Man kann aber auch im Voraus, ohne erst die Differenzen-Gleichung (13.) zu berechnen, finden, ob die gegebene Gleichung gleiche Wurzeln hat. Denn weil in dem Falle gleicher Wurzeln [*in der Gleichung* 8. *und folglich in der Gleichung* 11.] nothwendig $u = 0$ ist [*weil u die Differenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung bezeichnet*], so giebt die Gleichung (11.) in diesem Fall nothwendig $Y = 0$. Wenn also x irgend einer der gleichen Wurzeln der gegebenen Gleichung (5.) gleich ist, so müssen die beiden Gleichungen

$$33.\quad X = 0 \text{ und } Y = 0,$$

welche beide Gleichungen in x sind, nothwendig zugleich Statt finden.

Man darf also nur auf die bekannte Weise den grössten gemeinschaftlichen Divisor der Polynome X und Y suchen und diesen Divisor gleich Null setzen, so erhält man eine Gleichung, welche nur die glei-

Wurzeln zu finden.

chen Wurzeln der gegebenen enthält, aber auf Potenzen erhoben, deren Exponenten um Eins niedriger sind.

Der grösste gemeinschaftliche Divisor von X und Y sey R, und X' der Quotient von X, dividirt durch R; so ist leicht zu sehen, dass die Gleichung

$$34.\quad X' = 0$$

alle die nämlichen Wurzeln hat, wie $X = 0$, nur mit dem Unterschiede, dass die Wurzeln, welche in $X = 0$ mehrfach vorkommen, in $X' = 0$ einfach sind; mithin gehört alsdann die Gleichung $X' = 0$ für den obigen Fall.

Auch kann man, wenn man will, zwei einzelne Gleichungen finden, deren eine blos die gleichen, die andere blos die ungleichen Wurzeln der gegebenen Gleichung $X = 0$ enthält. Man darf zu dem Ende nur von Neuem den grössten gemeinschaftlichen Divisor der Polynome X' und Y suchen. Man bezeichne denselben durch R', nehme den Quotienten X' dividirt durch R', welcher X'' seyn mag, und setze die beiden Gleichungen

$$35.\quad X'' = 0 \text{ und } R' = 0.$$

Die erste wird blos die ungleichen [*oder nur einmal vorkommenden*], die zweite blos die gleichen [*oder mehrmal vorkommenden*] Wurzeln, und zwar letztere jede Wurzel nur einmal enthalten, so dass jede der beiden Gleichungen $X'' = 0$ und $R' = 0$ andere Wurzeln enthält, und folglich für das Verfahren des vorigen Abschnitts passet.

Die gleichen und unmöglichen

16.

Nachdem man auf diese Weise [*nämlich durch die obigen Verfahren zusammengenommen*] die Zahl der reellen gleichen und ungleichen Wurzeln der gegebenen Gleichung gefunden hat, so folgt, im Fall die Zahl dieser Wurzeln kleiner als der höchste Exponent der Gleichung ist, dass dieselbe nothwendig auch noch unmögliche Wurzeln haben muss.

Sollen alle Wurzeln der gegebenen Gleichung (5.) reell seyn, so müssen die Werthe [*der Differenzen der Wurzeln, also die Werthe*] von u in der Gleichung (11.) ebenfalls sämmtlich reell seyn. Mithin müssen die Werthe von u^2 oder v (12.) in der Gleichung (13.) ebenfalls sämmtlich reell und positiv seyn [*weil das Quadrat* u^2 *immer positiv ist*]. Folglich muss die Gleichung (13. §. 8.) lauter reelle positive Wurzeln haben. Mithin müssen die Zeichen der Glieder der Differenzen-Gleichung nach der bekannten [*Descartischen*] Regel abwechselnd positiv und negativ seyn. Ist dieses nicht der Fall, so folgt daraus, dass die gegebene Gleichung nothwendig unmögliche Wurzeln hat. [*So also zeigt die Differenzen-Gleichung* (13.) *auch die Existenz der unmöglichen Wurzeln.*]

Nun sind bekanntlich die unmöglichen Wurzeln immer Paarweise vorhanden und können Paarweise durch

36. $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ und $\alpha - \beta\sqrt{-1}$

ausgedrückt werden, wo α und β reelle Grössen sind.

Wurzeln zu finden.

(Man sehe die neunte Anmerkung.) Es ist also

37. $u = \pm 2\beta\sqrt{-1}$

[*weil u die Differenz zweier Wurzeln ist*], und folglich

38. $v = -4\beta^2$;

woraus folgt, dass die Differenzen-Gleichung (13.) nothwendig so viel negative Wurzeln haben muss, als die gegebene Gleichung (5.) Paare unmöglicher Wurzeln hat.

Setzt man also

39. $v = -w$,

wodurch die Differenzen-Gleichung (13.) in

40. $w^n + aw^{n-1} + bw^{n-2} + cw^{n-3} \ldots\ldots = 0$

übergeht, so muss diese Gleichung nothwendig so viele reelle positive Wurzeln haben, als die gegebene Gleichung Paare unmöglicher Wurzeln hat.

17.

Hieraus folgt, dass man, um die Werthe der imaginairen Wurzeln der gegebenen Gleichung (5.) zu finden, nur die reellen positiven Wurzeln der verwandelten Differenzen-Gleichung (40.) suchen darf. Denn wenn diese positiven Wurzeln w', w'', w'''.... sind, so sind erstlich $\frac{\sqrt{w'}}{2}$, $\frac{\sqrt{w''}}{2}$, $\frac{\sqrt{w'''}}{2}$.... die Werthe von β [(36.), *weil* $4\beta^2 = -v = w$, *also* $\beta = \frac{\sqrt{w}}{2}$ *war* (38. 39.)]. Nun setze man, um die zugehörigen Werthe von α zu finden, in die gegebene Gleichung (5.) $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ statt x, und stelle zwei einzelne Gleichungen auf, die eine blos mit reellen Gliedern, die andere mit Gliedern, welche sämmt-

Die gleichen und unmöglichen

lich mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt sind, welches zwei Gleichungen von der Form

$$41. \quad \alpha^m + P\alpha^{m-1} + Q\alpha^{m-2} \ldots\ldots = 0 \text{ und}$$

$$42. \; m\alpha^{m-1} + p\alpha^{m-2} + q\alpha^{m-3} \ldots\ldots = 0$$

geben wird, in welchen die Coefficienten P, $Q \ldots\ldots$ p, $q \ldots\ldots$ von a, b, $c \ldots\ldots$ und β abhängen. [*Denn, wenn man in die gegebene Gleichung* (5.)

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots\ldots = 0$$

$\alpha + \beta\sqrt{-1}$ *statt* x *setzt, so erhält man*

$$\alpha^m + m\alpha^{m-1}\beta\sqrt{-1} - \frac{m.m-1}{2}\alpha^{m-2}\beta^2 \ldots\ldots$$

$$-A(\alpha^{m-1} \qquad + m.\alpha^{m-2}\beta\sqrt{-1}\ldots\ldots)$$

$$+B(\alpha^{m-2}\ldots\ldots) = 0,$$

oder

$$\alpha^m - A\alpha^{m-1} + \left(B - \frac{m.m-1}{2}\beta^2\right)\alpha^{m-2}\ldots\ldots$$

$$+ m\alpha^{m-1}\beta\sqrt{-1} - mA\alpha^{m-2}\beta\sqrt{-1}\ldots\ldots = 0,$$

welche Gleichung, weil ihr reeller und ihr imaginairer Theil einzeln gleich Null seyn müssen, in die beiden Gleichungen

$$\alpha^m - A\alpha^{m-1} + \left(B - \frac{m.m-1}{2}\beta^2\right)\alpha^{m-2}\ldots\ldots = 0 \text{ und}$$

$$m\alpha^{m-1} - mA\alpha^{m-2}\ldots\ldots = 0$$

zerfällt, welche die Form der Gleichungen (41. *und* 42.) *haben.*]

Giebt man also nun der Grösse β einen der obigen Werthe, so müssen die beiden Gleichungen (41. und 42.) nothwendig zugleich Statt finden und folglich einen gemeinschaftlichen Divisor haben. Man

Wurzeln zu finden.

darf also nur den grössten gemeinschaftlichen Divisor der beiden Gleichungen (41. und 42.) suchen und denselben [*wie er es vermöge seiner Eigenschaft als Factor der beiden Gleichungen nothwendig ist*] gleich Null setzen, so erhält man eine Gleichung zwischen α und β, aus welcher man, weil β bekannt ist, nunmehr auch α finden kann.

Zu bemerken ist, dass, wenn alle Werthe von β, die die Gleichung (40.) giebt, unter sich ungleich sind, dann zu jedem Werthe von β nur ein Werth von α gehören kann [*weil sonst mehr Wurzeln herauskommen würden, als möglich sind*]. In diesem Fall also können die beiden Gleichungen (41. und 42.) nur eine einzige gemeinschaftliche Wurzel haben, [*weil sonst zu jedem β, gegen die Voraussetzung, mehr als ein Werth von α gehören würde; denn der gemeinschaftliche Divisor der beiden Gleichungen* (41. *und* 42.), *welcher ihre gemeinschaftliche Wurzel enthält, gab eine Gleichung zwischen α und β, aus welcher das zu jedem β gehörige α gefunden werden konnte.*] Folglich kann der gemeinschaftliche Divisor der beiden Gleichungen (41. u. 42.) in diesem Falle nur vom ersten Grade seyn.

Man darf also alsdann die Division nur so lange fortsetzen, bis man auf einen Rest kommt, welcher α nur noch in einer Abmessung enthält. Diesen Rest kann man dann gleich Null setzen und daraus den gesuchten Werth von α finden.

Wären dagegen unter den aus der Gleichung (40.) gefundenen Werthen von β z. B. zwei einander gleich,

so müssten die Gleichungen (41. und 42.), weil zu den gleichen Werthen von β verschiedene Werthe von α gehören können, wenn man darin den doppelten Werth von β substituirt, für jeden zugehörigen Werth von α Statt finden. Die beiden Gleichungen (41. u. 42.) müssen also alsdann nothwendig zwei gemeinschaftliche Wurzeln haben, und folglich muss ihr gemeinschaftlicher Divisor vom zweiten Grade seyn. Man muss also in diesem Falle die Division nicht weiter fortsetzen, als bis man auf einen Rest kommt, welcher α noch in zwei Abmessungen enthält. Diesen Rest setzt man gleich Null, welches eine Gleichung des zweiten Grades giebt, aus welcher man die beiden Werthe von α findet, welche beide nothwendig reell sind [*weil α eine reelle Grösse ist*].

Eben so, wenn β drei gleiche Werthe hätte, so müsste man, um die zugehörigen Werthe von α zu finden, nur bis zu einem Rest gehen, in welchem die höchste Potenz von α die dritte ist. Setzt man diesen Rest gleich Null, so erhält man eine Gleichung mit α vom dritten Grade, welche die zu einem und demselben Werthe von β gehörigen drei reellen Werthe von α giebt, und so weiter.

[*Um die imaginairen Wurzeln einer gegebenen Gleichung zu finden, ist also nach Lagrange die wirkliche Entwickelung der reellen Wurzeln der Differenzen-Gleichung nöthig.*]

Dritter Abschnitt.

Neue Methode, die Werthe der Wurzeln numerischer Gleichungen Näherungsweise zu finden.

18.

Es sey die Gleichung

43. $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots + K = 0$

gegeben. Man nehme an, durch die obige Methode oder auf anderm Wege sey schon diejenige ganze Zahl gefunden, welche einer der reellen positiven Wurzeln der gegebenen Gleichung am nächsten kommt. Diese Zahl sey p, so dass

44. $x > p$ und $x < p + 1$

ist, so setze man

45. $x = p + \frac{1}{y}$.

Man substituire diesen Werth von x in die gegebene Gleichung statt x, so erhält man, nachdem Alles mit y^m multiplicirt worden und die Glieder nach den Potenzen von y geordnet sind, eine Gleichung von der Form

46. $A'y^m + B'y^{m-1} + C'y^{m-2} \ldots + K' = 0$

Neues Näherungs-

[*denn da in* (45.) y *in derselben Abmessung vorkommt, wie* x, *so muss auch in* (46.) y *eben so vorkommen wie* x *in* (43.)].

Da nun aber nach der Voraussetzung $\frac{1}{y} > 0$ und < 1 ist, so ist $y > 1$ [*weil* $\frac{1}{y}$ *ein echter Bruch seyn soll*]. Mithin ist eine der reellen Wurzeln der Gleichung (46.) nothwendig grösser als Eins.

Man suche also ferner, nach dem Verfahren des ersten Abschnitts, die dieser Wurzel am nächsten kommende ganze Zahl. Da die Wurzel nothwendig positiv ist, so darf man y nur als positiv betrachten (§. 4.).

Ist die der Grösse y am nächsten kommende ganze Zahl, welche durch q bezeichnet werden mag, gefunden, so setze man

$$47.\quad y = q + \frac{1}{z}$$

und substituire diesen Werth von y in die Gleichung (46.), so erhält man eine dritte Gleichung in z von der Form

$$48.\quad A''z^m + B''z^{m-1} + C''z^{m-2} \ldots + K'' = 0,$$

welche nothwendig wenigstens eine reelle Wurzel haben muss, die grösser ist als Eins [*aus demselben Grunde wie oben*], und deren nahe kommenden ganzzahligen Werth man also wieder finden kann.

Heisst dieser, der Wurzel z nahe kommende, ganzzahlige Werth r, so setze man von Neuem

$$49.\quad z = r + \frac{1}{u}$$

Verfahren.

und substituire ihn, so erhält man eine Gleichung in u, welche wenigstens eine reelle Wurzel haben muss, die grösser ist als Eins u. s. w.

Fährt man auf diese Weise fort, so kann man sich der gesuchten Wurzel $[x]$ so weit nähern, als man will. Ist eine der Zahlen p, q *etc.* eine genaue Wurzel, so ist $x = p$, $y = q$ *etc.* und die Rechnung ist beendigt. Die Grösse x hat in diesem Falle einen commensurabeln Werth.

In allen andern Fällen ist der Werth der Wurzel nothwendig incommensurabel, und man kann sich demselben blos so weit nähern, als man will.

19.

Hat die gegebene Gleichung mehrere reelle positive Wurzeln, so kann man, dem ersten Abschnitte zufolge, die nächsten ganzzahligen Werthe aller Wurzeln finden. Bezeichnet man diese Werthe durch p, p', p'', so kann man sich derselben, der Reihe nach, bedienen, um die wahren Werthe der Wurzeln zu finden. Es ist blos zu bemerken:

Erstlich, dass wenn die Zahlen p, p', p'' alle von einander verschieden sind, die obigen verwandelten Gleichungen (46. und 48.) jede nur eine reelle Wurzel haben können, welche grösser ist als Eins. Denn hätte z. B. die Gleichung (46.) zwei reelle Wurzeln, grösser als Eins, z. B. y' und y'', so wäre zugleich $x = p + \frac{1}{y'}$, und $x = p + \frac{1}{y''}$, so dass diese beiden Werthe von x dem nämlichen ganzzah-

Neues Näherungs-

ligen Werthe p am nächsten kämen, welches der Voraussetzung zuwider läuft. Eben so würde es sich verhalten, wenn die Gleichung (48.), oder eine der folgenden, zwei reelle Wurzeln hätte, die grösser wären als Eins.

Daraus folgt, dass man, um in diesem Falle die nächsten ganzzahligen Werthe q, r *etc.* der Wurzeln der Gleichungen (46. 48 etc.) zu finden, nur der Reihe nach statt y, z *etc.* die natürlichen positiven Zahlen 1, 2, 3.... setzen darf, so weit fort, bis die Resultate zweier auf einander folgender Substitutionen verschiedene Zeichen haben (§. 6.) [*weil man, wenn eine Gleichung nur eine reelle Wurzel hat, sicher ist, mit der angenommenen Differenz keine zweite Wurzel zu übergehen.*]

Zweitens, dass, wenn zwei Werthe von x den nämlichen nächsten ganzzahligen Werth p haben, die Gleichung (46.) für diesen Werth p ebenfalls zwei Wurzeln hat, welche grösser sind als Eins, und dass, wenn der nächste ganzzahlige Werth dieser Wurzeln wieder der nämliche ist, auch die Gleichung (48.) zwei Wurzeln hat, grösser als Eins u. s. w., bis man auf eine Gleichung kommt, deren beide Wurzeln, während sie grösser sind als Eins, verschiedene nächste ganzzahlige Werthe haben. Alsdann gehört zu jedem dieser beiden Werthe eine Reihe von Gleichungen, welche alle nur eine reelle Wurzel haben, die grösser ist als Eins.

Denn wenn zwei verschiedene Werthe von x mit dem nämlichen nächsten ganzzahligen Werth p

Verfahren.

Statt finden, so muss y, weil die beiden Werthe durch $p + \frac{1}{y}$ ausgedrückt werden, nothwendig zwei reelle Werthe haben, welche grösser sind als Eins, und wenn die beiden Werthe von y den nämlichen nächsten ganzzahligen Werth q haben, so muss, wenn man $y = q + \frac{1}{z}$ setzt, wiederum nothwendig z zwei verschiedene Werthe haben, die grösser sind als Eins, und so weiter.

Wären hingegen die ganzzahligen nächsten Werthe von y verschieden, so kann man, wenn man sie durch q und q' bezeichnet, $y = q + \frac{1}{z}$ und $y = q' + \frac{1}{z}$ setzen, und es ist klar, dass alsdann z in diesen beiden Beziehungen nur einen einzigen reellen Werth haben kann, der grösser ist als Eins, indem sonst der Werth von y, statt blos zweifach, drei-, vierfach u. s. w. seyn würde.

Ist man also auf eine transformirte Gleichung gekommen, deren beide, die Einheit übersteigenden Wurzeln verschiedene ganzzahlige Theile haben, so ist man sicher, dass die aus jeder der beiden Wurzeln weiter folgenden transformirten Ausdrücke immer nur eine einzige Wurzel haben, welche grösser ist als die Einheit. Ueber die Mittel, die ganzzahligen Theile der Wurzeln p, q *etc.* zu finden, wenn sie mehreren Wurzeln gemein sind, sehe man weiter unten im sechsten Abschnitt den vierten Artikel.

Ueber die Fälle, wenn in der gegebenen Gleichung (40.) drei und mehrere Wurzeln gleiche ganz-

Neues Näherungs-

zahlige Theile haben, lassen sich ähnliche Bemerkungen machen.

20.

Wir setzten in §. 18. voraus, dass die gesuchten Wurzeln positiv sind. Um die negativen zu finden, darf man nur in der gegebenen Gleichung $-x$ statt $+x$ setzen und von der daraus entstehenden Gleichung die positiven Wurzeln suchen. Dieselben sind die negativen Wurzeln der gegebenen Gleichung (§. 4.).

Wie die unmöglichen Wurzeln, welche sich immer durch $\alpha + \beta \sqrt{-1}$ ausdrücken lassen, gefunden werden können, nämlich, dass man die Gleichungen sucht, deren Wurzeln α und β sind, zeigten wir im zweiten Abschnitte. Man darf nur die reellen Wurzeln dieser Gleichungen suchen, so findet man auch alle unmögliche Wurzeln der gegebenen Gleichung.

21.

Die Substitutionen von $p + \frac{1}{y}$ statt x, $q + \frac{1}{z}$ statt y u. s. w. in (§. 18.) werden dadurch erleichtert, dass sich die Coefficienten der verwandelten Gleichungen auch unmittelbar aus denen der gegebenen Gleichung (43.) finden lassen. Es ist z. B.

$$50. \begin{cases} A' = Ap^m + Bp^{m-1} + Cp^{m-2} + Dp^{m-3} \ldots \\ B' = mAp^{m-1} + (m-1)Bp^{m-2} + (m-2)Cp^{m-3} \ldots \\ C' = \frac{m.m-1}{2} Ap^{m-2} + \frac{m-1.m-2}{2} Bp^{m-3} \ldots \end{cases}$$

etc.

Verfahren.

[*Denn, wenn man z. B. in die Gleichung*

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots\ldots$$

$p + \frac{1}{y}$ *statt* x *setzt, so erhält man*

$$A\left(p+\frac{1}{y}\right)^m + B\left(p+\frac{1}{y}\right)^{m-1} + C\left(p+\frac{1}{y}\right)^{m-2} \ldots\ldots$$

In dieser Gleichung sind die Glieder, in welchen $\frac{1}{y}$ *in der* 0*ten Potenz, das heisst, gar nicht vorkommt,*

$$Ap^m + Bp^{m-1} + Cp^{m-2} \ldots\ldots;$$

die Glieder, in welchen die erste Potenz von $\frac{1}{y}$ *vorkommt,*

$$mAp^{m-1} + (m-1)Bp^{m-2} + (m-2)Cp^{m-3} \ldots\ldots;$$

die Glieder, in welchen die zweite Potenz von $\frac{1}{y}$ *vorkommt,*

$$\frac{m.(m-1)}{2}Ap^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2}Ap^{m-3} \ldots\ldots$$

u. s. w. Die Glieder mit der 0*ten Potenz von* $\frac{1}{y}$ *sind aber, wenn man mit* y^m *multiplicirt, diejenigen mit* y^m; *die Glieder mit der ersten Potenz von* $\frac{1}{y}$ *diejenigen mit* y^{m-1}; *die Glieder mit der zweiten Potenz von* $\frac{1}{y}$ *diejenigen mit* y^{m-2} *u. s. w. Also sind die ersten gleich dem Coefficienten* A', *die zweiten gleich dem Coefficienten* B', *die dritten gleich dem Coefficienten* C' *u. s. w.*]

Auf dieselbe Weise erhält man aus den Coeffi-

Neues Näherungs-

cienten der Gleichung (46.) die Coefficienten der Gleichung (48.). Man darf blos in die obigen Ausdrücke (50.) q statt p, A'', B'', C''.... statt A', B', C'...., A', B', C'.... statt A, B, C.... u. s. w. setzen.

Hieraus folgt, dass der erste Coefficient A' oder A'' *etc.* niemals anders verschwindet, als wenn p oder q *etc.* die genaue Wurzel ist, in welchem Fall, wie wir in §. 18. sahen, der continuirliche Bruch bei dieser Zahl abbricht; denn wäre $A' = 0$ oder $A'' = 0$ *etc.*, so wäre $y = \infty$ oder $z = \infty$ *etc.*, also $x = p$, $y = q$ *etc.* [*Dividirt man nemlich in* (46.) *mit* A', *so erhält man*

$$y^m = -\frac{B'}{A'}y^{m-1} - \frac{C'}{A'}y^{m-2} \ldots - \frac{K'}{A'},$$

welches für $A' = 0$, $y = \infty$ *giebt.*]

22.

Die ganzzahligen Theile der Wurzeln der Gleichungen (43. 46. 48.) mögen $p, q, r, s, t \ldots$ seyn, so dass

$$51. \quad x = p + \frac{1}{y},\ y = q + \frac{1}{z},\ z = r + \frac{1}{u}\ \textit{etc.}$$

ist. Setzt man diese Ausdrücke nach und nach in den Ausdruck von x, so erhält man

$$52. \quad x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \ldots}}}$$

Also lässt sich auf diese Weise der Werth von x,

das

Verfahren.

das heisst, die gesuchte Wurzel der gegebenen Gleichung, durch einen continuirlichen oder Ketten-Bruch ausdrücken, und, wie bekannt, drücken dergleichen Brüche den Werth einer beliebigen rationalen oder irrationalen Zahl am einfachsten und genauesten aus.

Huygens scheint der Erste zu seyn, welcher diese Eigenschaft der stetigen Brüche bemerkte und dieselben anwandte, um die einfachsten Brüche zu finden, welche einem gegebenen Bruche am nächsten kommen. (Man sehe seine Abhandlung „de automato planetario.“)

Mehrere geschickte Geometer beschäftigten sich seitdem mit der Theorie der stetigen Brüche und machten von derselben verschiedene nützliche und sinnreiche Anwendungen; man war aber, wie ich glaube, noch nicht darauf gekommen, sich derselben zur Auflösung der Gleichungen zu bedienen.

23.

Verwandelt man die continuirlichen Brüche

$$\frac{p}{1},\ p+\frac{1}{q},\ p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r}}\ etc.$$

in gewöhnliche Brüche, so erhält man, wenn man

$$53.\ \begin{cases} p=\alpha & 1=\alpha' \\ q\alpha+1=\beta & q\alpha'=q=\beta' \\ r\beta+\alpha=\gamma & r\beta'+\alpha'=\gamma' \\ s\gamma+\beta=\delta & s\gamma'+\beta'=\delta \\ etc. & \end{cases}$$

Neues Näherungs-

setzt, folgende Reihe particulairer Brüche:

$$54.\quad \frac{\alpha}{\alpha'},\ \frac{\beta}{\beta'},\ \frac{\gamma}{\gamma'},\ \frac{\delta}{\delta'}\ \text{etc.}$$

[*Denn die stetigen Brüche geben, der Reihe nach,*

$$\frac{p}{1},\ \frac{pq+1}{q},\ \frac{(rq+1)p+r}{rq+1},\ \frac{((rs+1)q+s)p+rs+1}{(rs+1)q+s}\ \text{etc.}$$

Nun ist gesetzt worden

$$\begin{aligned} p &= \alpha & 1 &= \alpha' \\ qp+1 &= \beta & q &= \beta' \\ r(qp+1)+p &= \gamma & rq+1 &= \gamma' \\ s(r(qp+1)+p)+qp+1 &= \delta & s(rq+1)+q &= \delta' \\ \text{etc.} & & \text{etc.} & \end{aligned}$$

also sind die stetigen Brüche, der Reihe nach,

$$\frac{\alpha}{\alpha'},\ \frac{\beta}{\beta'},\ \frac{\gamma}{\gamma'},\ \frac{\delta}{\delta'}\ \text{etc.}$$

Man sehe darüber Mehreres in den Lehrbüchern.]

Diese Brüche $\frac{\alpha}{\alpha'}, \frac{\beta}{\beta'}, \frac{\gamma}{\gamma'}, \frac{\delta}{\delta'} \ldots.$ nähern sich dem wahren Werthe von x, und zwar ist der erste kleiner, der zweite grösser, der dritte wieder kleiner als dieser Werth u. s. w., so dass der Werth von x immer zwischen zwei aufeinander folgenden Brüchen liegt, welches aus der Natur der continuirlichen Brüche, aus welchen die gegenwärtigen Brüche abgeleitet wurden, leicht zu zeigen ist. [*Nemlich in so fern die Grössen p, q, $r \ldots.$ alle einerlei Zeichen haben. Alsdann ist offenbar p kleiner als $p+\frac{1}{q}$, hingegen $\frac{1}{q}$ ist grösser als $\frac{1}{q+\frac{1}{p}}$, und also* $p+\frac{1}{q+\frac{1}{r}}$

Verfahren.

kleiner als $p + \frac{1}{q}$. *Der folgende Bruch ist wieder grösser als* $p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r}}$ *u. s. w. Da sich nun die Brüche dem Werthe dessen, was sie, bis zum Ende fortgesetzt, ausdrücken sollen, nähern, so ist dieses nothwendig grösser als p, kleiner als* $p + \frac{1}{q}$, *grösser als* $p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r}}$ *u. s. w.]*

Nun ist, aus den Gleichungen (53.), leicht zu sehen, dass

$$55. \begin{cases} \beta\alpha' - \alpha\beta' = +1 \\ \gamma\beta' - \beta\gamma' = -1 \\ \delta\gamma' - \gamma\delta' = +1 \\ \text{etc.} \end{cases}$$

[Denn es ist z. B.

$$\beta\alpha' - \alpha\beta' = (qp+1)1 - pq = 1$$

$$\gamma\beta' - \beta\gamma' = (r\beta + \alpha)q - (q\alpha + 1)(rq + 1)$$

$$= (r(q\alpha + 1) + \alpha)q - (q\alpha + 1)(rq + 1) = -1 \text{ etc.]}$$

Daraus folgt:

Erstlich, dass die Brüche $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$ *etc.* immer schon auf ihre kleinste Benennung gebracht sind. Denn hätten z. B. γ und γ' einen gemeinschaftlichen, von der Einheit verschiedenen Divisor, so müsste, vermöge der Gleichung $\beta\gamma' - \gamma\beta' = 1$, auch die Einheit durch denselben theilbar seyn *[welches nicht der Fall ist]*.

Zweitens, dass

Neues Näherungs-

$$56.\ \begin{cases} \frac{\beta}{\beta'} - \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{1}{\alpha'\beta'} \\ \frac{\gamma}{\gamma'} - \frac{\beta}{\beta'} = -\frac{1}{\beta'\gamma'} \\ \frac{\delta}{\delta'} - \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\gamma'\delta'} \end{cases}$$

etc.

[*wie man sieht, wenn man die erste Gleichung* (55.) *durch* $\alpha'\beta'$, *die zweite durch* $\beta'\gamma'$, *die dritte durch* $\gamma'\delta'$ *u. s. w. dividirt*], so dass die Brüche $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$.... von dem wahren Werthe von x niemals um mehr als eine Grösse abweichen können, die kleiner ist als $\frac{1}{\alpha'\beta'}$, $\frac{1}{\beta'\gamma'}$, $\frac{1}{\gamma'\delta'}$ *etc.*, woraus sich der Grad der Näherung abnehmen lässt. [*Denn da der wahre Werth von x immer* z w i s c h e n *zwei auf einander folgende Brüche fällt, so kann der Unterschied zwischen demselben und den Brüchen nie grösser seyn, als die Unterschiede zweier auf einander folgender Brüche selbst, welche in* (56.) *ausgedrückt sind.*]

Da allemal $\beta > \alpha$, $\gamma' > \beta$ *etc.* (53.), so ist

$$\frac{1}{\alpha'^2} > \frac{1}{\alpha'\beta'},\ \frac{1}{\beta'^2} > \frac{1}{\beta'\gamma'}\ etc.;$$

woraus folgt, dass die Abweichung der Brüche von dem wahren Werthe von x immer kleiner ist, als die Einheit, dividirt durch das Quadrat der Nenner der Brüche.

D r i t t e n s, dass jeder Bruch dem Werthe von x sich nicht allein mehr nähert als alle vorhergehen-

den, sondern auch mehr als irgend ein anderer Bruch mit einem kleinern Nenner. Denn, wenn z. B. der Bruch $\frac{\mu}{\mu'}$ genauer wäre, als $\frac{\gamma}{\gamma'}$ während $\mu' < \gamma'$ ist, so müsste $\frac{\mu}{\mu'}$ zwischen $\frac{\gamma}{\gamma'}$ und $\frac{\delta}{\delta'}$ liegen, also $\frac{\mu}{\mu'} - \frac{\gamma}{\gamma'} < \frac{\delta}{\delta'} - \frac{\gamma}{\gamma'} < \frac{1}{\gamma'\delta'}$ und > 0, also [$\frac{\mu\gamma' - \mu'\gamma}{\mu'\gamma'} < \frac{\delta\gamma' - \delta'\gamma}{\delta'\gamma'}$, *oder* $\mu\gamma' - \mu'\gamma < \frac{\mu'}{\delta'}(\delta\gamma' - \delta'\gamma)$, *oder, weil* $\delta\gamma' - \delta'\gamma = 1$ *ist* (55.)] $\mu\gamma' - \mu'\gamma < \frac{\mu'}{\delta'}$ [*und weil* $\mu' < \delta'$ *ist, indem* $\mu' < \gamma'$ *seyn soll und* γ' *selbst* $< \delta'$ *ist* (53.)] < 1 und > 0 seyn, welches nicht möglich ist, weil γ, γ', μ, μ' ganze Zahlen sind [*so dass also* $\mu\gamma' - \mu'\gamma$ *kein Bruch seyn oder nicht zwischen* 0 *und* 1 *liegen kann*].

24.

Die Brüche $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$ *etc.* kann man Haupt-brüche (fractions principales) nennen, weil sie sich dem gesuchten Werthe so genau als möglich nähern. Sind aber die Zahlen p, q, r *etc.* von der Einheit verschieden, so lassen sich auch noch andere, dem gesuchten Werthe sich nähernde Brüche finden, welche man, wenn man will, Neben-Brüche (fractions secondaires) nennen kann.

Ist z. B. $r > 1$, so kann man zwischen die Brüche $\frac{\alpha}{\alpha'}$ und $\frac{\gamma}{\gamma'}$, welche beide kleiner als x sind, so viele Neben-Brüche einschalten als $r - 1$ Einhei-

ten hat, indem man, der Reihe nach, 1, 2, 3 $r-1$ statt r setzt. Dieses giebt, weil

$$\gamma = r\beta + \alpha \text{ und } \gamma' = r\beta' + \alpha' \text{ ist (53.)}$$

$$57. \quad \frac{\alpha}{\alpha'}, \frac{\beta+\alpha}{\beta'+\alpha'}, \frac{2\beta+\alpha}{2\beta'+\alpha'}, \frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'} \dots \frac{r\beta+\alpha}{r\beta'+\alpha'}.$$

Der erste und der letzte dieser Brüche sind die beiden Hauptbrüche $\frac{\alpha}{\alpha'}$ und $\frac{\gamma}{\gamma'}$, die dazwischen liegenden sind die Nebenbrüche. [*Diese Einschaltung geht an, weil Zähler und Nenner des einen Bruchs* $\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{r\beta+\alpha}{r\beta'+\alpha'}$, *aus einem Gleichvielfachen ganzer Zahlen* β *und* β', *nämlich dem* r *fachen dieser Zahlen bestehen.*]

Nimmt man nun die Differenz zwischen zwei auf einander folgenden Brüchen dieser Reihe, z. B. zwischen $\frac{2\beta+\alpha}{2\beta'+\alpha'}$ und $\frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}$, so erhält man $\frac{1}{(2\beta'+\alpha')(3\beta'+\alpha')}$, so dass die Differenz immer positiv ist und von einem Bruche zum andern abnimmt; woraus folgt, dass, weil der letzte Bruch $\frac{\gamma}{\gamma'}$ kleiner ist, als der genaue Werth des stetigen Bruchs, auch alle Nebenbrüche kleiner sind, als dieser Werth, und demselben sich nähern. [*Denn die Nebenbrüche liegen zwischen den beiden Hauptbrüchen* $\frac{\alpha}{\alpha'}$ *und* $\frac{\gamma}{\gamma'}$, *welche beide kleiner sind als* x. *Also sind sie alle kleiner als* x. *Ferner nähert sich* $\frac{\gamma}{\gamma'}$ *dem*

Verfahren.

Werthe von x mehr als $\frac{\alpha}{\alpha'}$, *folglich nähern sich die Nebenbrüche, der Reihe nach, dem Werthe von x immer mehr.*]

Das Nämliche folgt für alle andere Hauptbrüche. Fügt man also zu diesen Hauptbrüchen noch die beiden Brüche $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{0}$ hinzu, deren erster kleiner, der zweite grösser ist, als jede Grösse, so lassen sich zwei Reihen von Brüchen aufstellen, die sich der wahren gesuchten Grösse immerfort nähern, und von welchen die eine Reihe Brüche enthält, welche sämmtlich kleiner, die andere, Brüche, welche sämmtlich grösser sind, als die gesuchte Grösse, z. B.

Kleinere Brüche.

$$58. \begin{cases} \frac{0}{1}, \quad \frac{1}{1}, \quad \frac{2}{1}, \quad \frac{3}{1} \dots \frac{p}{1} \left(=\frac{\alpha}{\alpha'}\right) \\ \frac{\beta+\alpha}{\beta'+\alpha'}, \frac{2\beta+\alpha}{2\beta'+\alpha'}, \frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'} \dots \frac{r\beta+\alpha}{r\beta'+\alpha'} \left(=\frac{\gamma}{\gamma'}\right) \\ \frac{\delta+\gamma}{\delta'+\gamma'}, \frac{2\delta+\gamma}{2\delta'+\gamma'}, \frac{3\delta+\gamma}{3\delta'+\gamma'} \dots \frac{t\delta+\gamma}{t\delta'+\gamma'} \left(=\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right) \\ etc. \end{cases}$$

Grössere Brüche.

$$59. \begin{cases} \frac{1}{0}, \frac{\alpha+1}{\alpha'+1}, \frac{2\alpha+1}{2\alpha'+1}, \frac{3\alpha+1}{3\alpha'+1} \dots \frac{q\alpha+1}{q\alpha'+1} \left(=\frac{\beta}{\beta'}\right) \\ \frac{\gamma+\beta}{\gamma'+\beta'}, \frac{2\gamma+\beta}{2\gamma'+\beta'}, \frac{3\gamma+\beta}{3\gamma'+\beta'} \dots \frac{s\gamma+\beta}{s\gamma'+\beta'} \left(=\frac{\delta}{\delta'}\right) \\ etc. \end{cases}$$

[*So steht im Original. Die erste Zeile von* (59.) *soll aber wohl heissen:*

Neues Näherungs-

$\frac{1}{0}, \frac{\alpha+1}{\alpha'+0}, \frac{2\alpha+1}{2\alpha'+0}, \frac{3\alpha+1}{3\alpha'+0} \dots \frac{q\alpha+1}{q\alpha'+0}\left(=\frac{\beta}{\beta'}\right)$,

denn nicht $\frac{q\alpha+1}{q\alpha'+1}$, *sondern* $\frac{q\alpha+1}{q\alpha'+0}$ *ist gleich* $\frac{\beta}{\beta'}$ (53.)]

Es ist, wie bei den Hauptbrüchen, leicht zu zeigen:

I. dass alle diese Brüche auf die kleinsten Zahlen gebracht sind, woraus folgt, dass, weil Zähler und Nenner der Brüche immerfort zunehmen, die Brüche immer grössere Zahlen enthalten, je weiter sie vom Anfange abstehen.

II. dass sich jeder Bruch der ersten Reihe mehr als jeder andere kleinere Bruch mit kleinerem Nenner, und jeder Bruch der zweiten Reihe mehr als jeder andere grössere Bruch mit kleinerem Nenner, dem genauen Werthe von x nähert.

Denn gesetzt es gäbe einen Bruch $\frac{\mu}{\mu'}$, dessen Werth kleiner wäre als der Werth von x, und sich diesem Werthe von x mehr näherte, als z. B. der Bruch $\frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}$, während zugleich $3\beta'+\alpha' > \mu'$ wäre; so müsste, weil der Bruch $\frac{\beta}{\beta'}$ grösser als der Werth von x ist, die Grösse $\frac{\mu}{\mu'}$ nothwendig zwischen den beiden Grössen $\frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}$ und $\frac{\beta}{\beta'}$ liegen. Also müsste die Grösse $\frac{\mu}{\mu'} - \frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}$ kleiner als $\frac{\beta}{\beta'} - \frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}$,

Verfahren.

das heisst, kleiner als $\left[\frac{3\beta\beta'+\beta\alpha'-3\beta\beta'-\beta'\alpha}{\beta'(3\beta'+\alpha')}\right.$, *oder* $\left.\frac{\beta\alpha'-\beta'\alpha}{\beta'(3\beta'+\alpha')}\right]$, also [*weil* $\beta\alpha'-\beta'\alpha=1$ *ist* (55.)] kleiner als $\frac{1}{\beta'(3\beta'+\alpha')}$ folglich $\left[\frac{\mu(3\beta'+\alpha')-\mu'(3\beta+\alpha)}{\mu'(3\beta'+\alpha')}\right.$ $<\frac{1}{\beta'(3\beta'+\alpha')}$, *oder*$\left.\right]$ $\mu(3\beta'+\alpha')-\mu'(3\beta+\alpha)<\frac{\mu'}{\beta'}<1$ seyn, welches nicht angeht.

[*Dieser Beweis, und folglich der Satz, auf welchen er sich bezieht, scheint zweifelhaft. Alles bis auf den letzten Schluss nämlich ist zwar unstreitig richtig, aber der letzte Schluss, dass, wenn* $\mu(3\beta'+\alpha')-\mu'(3\beta+\alpha)<\frac{\mu'}{\beta'}$ *ist, welches aus den vorhergehenden Voraussetzungen, wie gesagt, ganz richtig folgt, auch* $\mu(3\beta'+\alpha')-\mu(3\beta+\alpha)<1$ *seyn müsse, scheint nicht ganz klar; denn es ist zwar* $\mu'<\beta\beta'+\alpha'$ *vorausgesetzt worden, aber es ist deshalb nicht nothwendig* $\mu'<\beta'$, *und dieses müsste doch seyn, wenn aus* $\mu(3\beta'+\alpha')-\mu'(3\beta+\alpha)<\frac{\mu'}{\beta'}$, $\mu(3\beta'+\alpha')-\mu'(3\beta+\alpha)<1$ *folgen sollte. Es ist zwar nothwendiger Weise* $\mu(3\beta'+\alpha')-\mu'(3\beta+\alpha)>0$, *weil nach der Voraussetzung* $\frac{\mu}{\mu'}-\frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}>0$ *seyn soll, woraus das Vorhergehende unmittelbar folgt. Allein wenn nicht zugleich nothwendig* $\mu(3\beta'+\alpha')-\mu'(3\beta+\alpha)<1$ *ist, so kann es auch gleich einer* g a n z e n *Zahl seyn, und dann führt die Voraussetzung auf keinen Widerspruch, mithin ist dann die Unmöglichkeit der Voraussetzung,*

Neues Näherungs-Verfahren.

und folglich der Satz, welchem sie widerspricht, nicht bewiesen. Auch scheint a posteriori zu folgen, dass der Schluss nicht Statt findet, denn da μ' *blos kleiner als* $3\beta' + \alpha'$ *angenommen wird, so kann es ohne Zweifel grösser als* β' *seyn und folglich ist wohl* $\frac{\mu'}{\beta'}$ *nicht nothwendig ein echter Bruch, sondern kann allerdings eine ganze Zahl seyn. Ein* μ', *welches ein Vielfaches von* β' *wäre, ist durch Nichts ausgeschlossen.*

Ein dem obigen ganz ähnlicher Beweis kommt am Ende des Paragraphs 23. vor, allein dort ist es ganz anders. Dort ist $\frac{\mu'}{\delta'}$ *nothwendig kleiner als Eins, weil* μ' *kleiner als* γ' *vorausgesetzt wird, und* γ' *selbst kleiner als* δ', *also* μ' *um so mehr kleiner als* δ *ist.*]

Uebrigens kann es kommen, dass irgend ein Bruch der einen Reihe nicht so stark sich nähert als ein, obgleich in einfachen Zahlen ausgedrückter Bruch der andern. Dieses geschieht indessen nie, wenn der Bruch mit dem grössern Nenner, ein Hauptbruch ist (§. 23.).

Vierter Abschnitt.

Anwendung der obigen Verfahren auf einige Beispiele.

25.

Ich will zum ersten Beispiele die Gleichung nehmen, welche Newton durch sein Verfahren auflösete, nämlich die Gleichung

$$60.\quad x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Ich fange damit an, durch den Ausdruck des 8ten §. die zu dieser Gleichung gehörige [*Differenzen*-] Gleichung in v zu suchen.

In der dortigen Formel ist hier

$$m = 3,\ A = 0,\ B = -2,\ C = 5\ [\textit{Gleich. } 5.]$$

$$n = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3\ \text{(Gleichung 12.)}$$

$A_1 = 0$, $A_2 = 4$, $A_3 = 15$, $A_4 = 8$, $A_5 = 50$, $A_6 = 91$ [*Gleich.* 17.], also

$$a_1 = 12,\ a_2 = 72,\ a_3 = -1497\ [\textit{Gleich. } 19.]$$

und hieraus

$$a = 12,\ b = 36,\ c = -643\ [\textit{Gleich. } 20.],$$

so dass die gesuchte [*Differenzen*-] Gleichung (13.) hier

Beispiele.

61. $v^3 - 12v^2 + 36v + 643 = 0$

ist.

Da in dieser Gleichung die Zeichen nicht abwechselnd positiv und negativ sind, so folgt zunächst, dass die gegebene Gleichung nothwendig zwei unmögliche und folglich nur eine reelle Wurzel hat (§. 16.).

Man kann also statt x die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3.... setzen (§. 6.) [*weil es nur eine reelle Wurzel giebt und man also sicher ist, keine zweite zu übergehen.*]

Ich setze zuerst x positiv und suche die Grenze von x nach §. 12. Ich finde $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5} < 3$, also ist 3 die gesuchte ganzzahlige Grenze, so dass es hinreichend ist [*Gleichung* 60.] nur $x = 0, = 1, = 2, = 3$ zu setzen, welches -5, -6, -1 und $+16$ giebt, woraus folgt, dass die reelle Wurzel der gegebenen Gleichung zwichen 2 und 3 liegt und also 2 der nächste ganzzahlige Werth der gesuchten Wurzel ist.

Nun setze man, nach dem Verfahren des dritten Abschnitts,

$$x = 2 + \frac{1}{y},$$

so erhält man, wenn man [*dieses in die gegebene Gleichung* (60.)] substituirt und die Glieder nach y ordnet, die Gleichung

$$y^3 - 10y^2 - 6y - 1 = 0,$$

in welcher die Zeichen alle verwechselt sind, um das erste Glied positiv zu machen.

Beispiele.

Diese Gleichung hat also nothwendig nur eine, einzige Wurzel, welche grösser ist als Eins (§. 19.), so dass man, um näherungsweise ihren Werth zu finden, nur die Zahlen 0, 1, 2, 3 *etc.* statt y setzen darf, bis man zwei auf einander folgende Resultate von entgegengesetzten Zeichen findet.

Um nicht unnütze Substitutionen zu machen, bemerke man, dass das Resultat für $y = 0$ negativ ist, und für $y = 10$ ebenfalls. Man fange also von $y = 10$ an und setze $y = 10$ und 11, dieses giebt -61 und $+54$, woraus folgt, dass die dem Werthe von y am nächsten kommende ganze Zahl 10 ist. Es ist also

$$q\ [\S.\ 19.] = 10.$$

Man setze ferner

$$y = 10 + \frac{1}{z},$$

so erhält man die Gleichung

$$61z^3 - 94z^2 - 20z - 1 = 0.$$

Die Werthe 1, 2, 3 *etc.* für z geben -54, $+71$ *etc.* Also ist

$$r\ [\S.\ 19.] = 1.$$

Man setze ferner

$$z = 1 + \frac{1}{u},$$

so erhält man

$$54u^3 + 25u^2 - 89u - 61 = 0.$$

Dieses giebt für $u = 1$, 2 *etc.* -71, $+293$ *etc.*, also ist

$$s\ [\S.\ 19.] = 1$$

u. s. w.

Fährt man auf diese Weise fort, so findet man die Zahlen

Beispiele.

2, 10, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 12 *etc.*,

so dass die gesuchte Wurzel durch den continuirlichen Bruch

$$x = 2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \; etc.}}}}$$

ausgedrückt werden kann, welches nach (§. 23.) für x die Brüche

$$\frac{2}{1}, \frac{21}{10}, \frac{23}{11}, \frac{44}{21}, \frac{111}{53}, \frac{155}{74}, \frac{576}{275}, \frac{731}{349}, \frac{1307}{624}, \frac{16415}{7837} \; etc.$$

giebt, welche wechselsweise kleiner und grösser sind, als der wahre Werth von x.

Der letzte Bruch $\frac{16415}{7837}$ ist grösser als die gesuchte Wurzel; aber der Fehler beträgt noch nicht $\frac{1}{(7837)^2}$ (§. 23. 2.), das heisst, noch nicht 0,0000000163; wird also der Bruch $\frac{16415}{7837}$ in einen Decimal-Bruch verwandelt, so ist er bis auf die siebente Decimal-Stelle genau. Man findet

2,0945514865,

also liegt die gesuchte Wurzel

zwischen 2,09455149 und 2,09455147.

N e w t o n findet durch s e i n e Methode

2,09455147

(man sehe seine Methode der unendlichen Reihen); woraus folgt, dass das Newtonsche Verfahren in die-

Beispiele.

sem Falle ein sehr genaues Resultat giebt; aber man darf von demselben eine solche Genauigkeit nicht immer erwarten.

26.

Die beiden andern Wurzeln der Gleichung sind, wie wir schon sahen, unmöglich. Verlangte man sie, so könnte man sie nach der Methode von §. 17. finden.

Zu dem Ende nehme man die Gleichung in v (61.) wieder vor, setze darin $-w$ statt v und verwechsele alle Zeichen, so erhält man

$$62. \quad w^3 + 12w^2 + 36w - 643 = 0$$

und darf nun von dieser Gleichung nur eine reelle positive Wurzel suchen. Da ihr letztes Glied negativ ist, so hat sie nothwendig eine solche Wurzel. Man kann also den ganzzahligen Theil ihres Werths durch Substitution der natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3 *etc.* finden (§. 3.). Die Zahlen 5 und 6 geben -38 und $+221$, also ist die der positiven Wurzel der Gleichung (62.) am nächsten kommende ganze Zahl, 5.

Man setze also

$$w = 5 + \frac{1}{u}.$$

Substituirt man dieses und verwechselt die Zeichen, so erhält man

$$38u^3 - 231u^2 - 27u - 1 = 0.$$

Setzt man hierin, der Reihe nach, $u = 0, 1, 2$ *etc.*, so findet man, für $u = 6$ und $u = 7$, die Resultate -271 und $+1525$, also ist die der Grösse v am nächsten kommende ganze Zahl, 6.

Beispiele.

Man setze deshalb ferner

$$u = 6 + \frac{1}{x},$$

so erhält man, wenn man substituirt und die Zeichen verwechselt,

$$271\,x^3 - 1305\,x^2 - 453\,x - 38 = 0.$$

Nimmt man für x der Reihe nach 0, 1, 2 *etc.*, so findet man bis $x = 6$ negative Resultate und $+ 8837$ für $x = 6$; also ist 5 die nächste kleinere ganze Zahl vor x.

Man setze

$$x = 5 + \frac{1}{y}.$$

Substituirt und reducirt man, so erhält man

$$1053\,y^3 - 6822\,y^2 - 2760\,y - 271 = 0,$$

welches für die nächste kleine Zahl von y, 6 giebt u. s. w.

So kann man sich dem Werthe von w (62.) immer mehr nähern und erhält für w folgenden continuirlichen Bruch:

$$w = 5 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{6 \text{ etc.}}}}$$

welches für w die Brüche

$$\frac{5}{1}, \frac{31}{6}, \frac{160}{31}, \frac{991}{192} \text{ etc.}$$

giebt.

Nachdem auf diese Weise w gefunden worden, erhält man, nach (17.),

63. $\beta =$

Beispiele.

$$63.\quad \beta = \frac{\sqrt{w}}{2}$$

und folglich β.

Nun setze man $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ in die gegebene Gleichung (60.) statt x und stelle die beiden abgesonderten Gleichungen auf, von welchen die eine blos reelle Glieder, die andere lauter Glieder mit $\sqrt{-1}$ enthält. Dieses giebt folgende beiden Gleichungen

$$64.\quad \begin{cases} \alpha - (3\beta^2 + 2)\alpha - 5 = 0 \text{ und} \\ 3\alpha^2 - \beta^2 - 2 = 0. \end{cases}$$

Man suche den grössten gemeinschaftlichen Divisor dieser Gleichungen, und zwar setze man die Division nur so lange fort, bis man auf einen Rest kommt, welcher α nur noch in der ersten Potenz enthält (§. 17.). Dieser Rest ist $-\frac{8\beta^2 + 4}{3}\alpha - 5$. Setzt man denselben gleich Null, so erhält man

$$65.\quad \alpha = -\frac{15}{4(2\beta^2 + 1)}.$$

Man findet also nunmehr auch die beiden unmöglichen Wurzeln

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} \text{ und}$$
$$\alpha - \beta\sqrt{-1}$$

der gegebenen Gleichung.

27.

Zum zweiten Beispiele wollen wir die Gleichung

$$66.\quad x^3 - 7x + 7 = 0$$

nehmen. Hier ist

$$m = 3 \text{ und folglich } n = 3,$$

Beispiele.

ferner

$$A = 0,\ B = -7,\ C = -7,$$

woraus

$$A_1 = 0,\ A_2 = 14,\ A_3 = -21,\ A_4 = 98,\ A_5 = -245,\ A_6 = 833,$$

und hieraus

$$a_1 = 42,\ a_2 = 882,\ a_3 = 18669,$$

endlich aber

$$a = 42,\ b = 441,\ c = 49$$

folgt, so dass die [*zu der gegebenen gehörige Differenzen*-] Gleichung in v

$$67.\quad v^3 - 42v^2 - 441v - 49 = 0$$

ist.

Weil diese Gleichung lauter Zeichenwechsel hat, so sind nothwendig alle Wurzeln derselben reell (§. 16.), und da ausserdem die Gleichung nicht durch v theilbar ist, so folgt, dass die gegebene Gleichung in x keine gleichen Wurzeln hat (§. 15.).

Man setze nun, nach (§. 11.),

$$v = \frac{1}{y}$$

und ordne die Gleichung nach y, so erhält man

$$y^3 - 9y^2 + \tfrac{42}{49}y - \tfrac{1}{49} = 0.$$

Der grösste negative Coefficient dieser Gleichung ist 9. Also kann man

$$l = 10$$

setzen (§. 12.). Es lässt sich aber auch eine näher kommende Grenze finden, wenn man diejenige Zahl sucht, welche die drei Grössen

$$l^3 - 9l^2 + \tfrac{42}{49}l - \tfrac{1}{49}$$

$$3l^2 - 18l + \tfrac{42}{49}$$

$$3l - 9$$

Beispiele.

positiv macht [30. §. 12.]. Man findet, dass $l = 9$ eine solche Zahl ist, so dass

$$k = 3 \text{ (§. 11.) und folglich } \Delta = \tfrac{1}{3}.$$

Man setze also nach (§. 13. 2.) in die gegebene Gleichung, $\frac{x}{3}$ statt x, so erhält man

$$68. \quad x^3 - 63x + 189 = 0,$$

in welche Gleichung man nun blos die ganzen Zahlen 0, 1, 2 *etc.* statt x setzen kann. Nach (§. 13. 3.) findet man, dass die Reihe der Resultate nur zwei Zeichenwechsel hat, für $x = 4$, 5 und 6, so dass die gegebene Gleichung (66.) nur zwei positive Wurzeln hat, welche zwischen $\frac{4}{3}$ und $\frac{5}{3}$ und zwischen $\frac{5}{3}$ und $\frac{6}{3}$ fallen, woraus folgt, dass die nächste ganze Zahl an beiden 1 ist.

Man setze nun auch x negativ, um die negativen Wurzeln zu finden (§. 4.). Dadurch verwandelt sich die gegebene Gleichung in

$$69. \quad x^3 - 7x - 7 = 0.$$

Da das letzte Glied dieser Gleichung negativ ist, so hat sie nothwendig eine positive Wurzel (§. 3.). Sie kann aber auch nur eine solche Wurzel haben, weil wir die beiden andern schon fanden. Man kann also die dieser Wurzel am nächsten kommende ganze Zahl unmittelbar finden, wenn man statt x die Zahlen 0, 1, 2 *etc.* setzt, bis man auf zwei Resultate von entgegengesetzten Zeichen kommt (§. 3.). Dieses giebt $x = 3$ und $x = 4$, so dass der nächste ganzzahlige Werth der dritten Wurzel der gegebenen Gleichung, folglich von $-x$, 3 ist.

Beispiele.

Nachdem man auf diese Weise gefunden, dass die gegebene Gleichung (66.) drei reelle Wurzeln hat, zwei positive und eine negative, auch nunmehr die ganzzahligen Theile ihrer Werthe kennt, kann man sich diesen Werthen, nach dem Verfahren des dritten Abschnitts, weiter und so weit nähern als man will.

Wir wollen zunächst die positiven Wurzeln vornehmen und in die gegebene Gleichung $x^3 - 7x + 7 = 0$,

$$x = 1 + \frac{1}{y}$$

setzen; so erhält man

$$70. \quad y^3 - 4y^2 + 3y + 1 = 0,$$

welche Gleichung, weil 1 der nächste Werth der beiden Wurzeln ist, nothwendig zwei Wurzeln hat, die beide grösser als Eins sind (§. 19. 2.).

Man versuche zuerst, ob sich die beiden Wurzeln näherungsweise durch die Substitution der ganzen Zahlen 0, 1, 2 *etc.* finden lassen. Da nur das Glied $4y^2$ negativ ist, so darf man die Substitution, zu Folge (§. 13. 1.), nur soweit fortsetzen, bis $y^3 =$ oder $> 4y^2$ ist, das heisst, bis zu $y = 4$. Die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 für y geben 1, 1, —1, 13, woraus folgt, dass die gesuchten Wurzeln, die eine zwischen 1 und 2, die andere zwischen 2 und 3 liegen, so dass die nächsten Werthe von y, 1 und 2 sind.

Man setze also in die Gleichung (70.)

Erstlich,

$$y = 1 + \frac{1}{z},$$

Beispiele.

welches

$$71. \quad z^3 - 2z^2 - z + 1 = 0$$

giebt. Die Gleichung hat keine reelle Wurzel, welche grösser ist als Eins (§. 19. 2.). Man setze also, der Reihe nach, $z = 1$, 2 *etc*, bis man auf zwei Resultate von entgegengesetzten Zeichen kommt. Die Werthe 2 und 3 von z geben -1 und $+7$, also ist 2 der nächste Werth von z.

Man setze also

$$z = 2 + \frac{1}{u}$$

und substituire. Dieses giebt, wenn man die Zeichen wechselt,

$$u^3 - 3u^2 - 4u - 1 = 0.$$

Macht man $u = 1$, 2 *etc.*, so findet man den nächsten ganzzahligen Werth von u, gleich 4.

Man setze also

$$u = 1 + \frac{1}{w}$$

u. s. w.

Zweitens setze man in die Gleichung (70.)

$$y = 2 + \frac{1}{z},$$

so erhält man, nachdem die Zeichen gewechselt worden,

$$72. \quad z^3 + z^2 - 2z + 1 = 0.$$

Diese Gleichung hat, wie (71.), nur eine reelle Wurzel, die grösser ist als 1, so dass nur $z = 1$, 2 *etc.* gesetzt werden darf, welches -1, $+7$ *etc.* giebt, woraus folgt, dass 1 die nächste ganze Zahl von z ist.

Beispiele.

Man setze also weiter

$$z = 1 + \frac{1}{u},$$

so erhält man, wenn man die Zeichen wechselt,

$$u^3 - 3u^2 - 4u - 1 = 0,$$

woraus sich auf dieselbe Weise, wie oben, für die nächste ganze Zahl an u, 4 findet.

Man setze also

$$u = 4 + \frac{1}{w}$$

u. s. w.

Die beiden positiven Wurzeln der gegebenen Gleichung (66.) sind, also

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 \text{ etc.}}}}$$

und

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 \text{ etc.}}}}$$

woraus man, wie in dem vorigen Beispiele (§. 23. 24.) wenn man will, Brüche finden kann, die sich dem wahren Werthe von x immerfort nähern.

Um näherungsweise den negativen Werth von x zu finden, nehme man die Gleichung $x^3 - 7x - 7 = 0$ (69.) vor, in welcher schon der nächste ganzzahlige Werth der Wurzeln, 3 war. Man setze also

$$x = 3 + \frac{1}{y},$$

Beispiele.

welches, wenn man das Zeichen verwechselt,

$$y^3 - 20y^2 - 9y - 1 = 0$$

giebt. Da diese Gleichung nur eine reelle Wurzel haben kann, welche grösser ist als 1 (§. 19. 2.), so findet man den sich nähernden Werth derselben, wenn man der Reihe nach $y = 1, 2$ *etc.* setzt, bis man auf zwei auf einander folgende Resultate von entgegengesetzten Zeichen kommt, welches bei $y = 20$, 21 geschieht, so dass der gesuchte Werth von y, gleich 20 ist.

Man setze also

$$y = 20 + \frac{1}{u}$$

u. s. w.

Auf diese Weise findet man auch die negative Wurzel der gegebenen Gleichung (66.). Sie ist

$$x = -3 - \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{3 + \text{etc.}}}$$

[*Der wichtigste Nutzen der in dem vorigen Abschnitte vorgetragenen und in dem gegenwärtigen Abschnitte durch Beispiele erläuterten näherungsweisen Auflösungs-Methode der Gleichungen, ist wohl, dass sie überall direct und ohne anderes Probiren, als was die Methode selbst bestimmt, sowohl die reellen als die imaginairen Wurzeln giebt. Die dabei nöthigen Rechnungen sind aber allerdings weitläuftig.*]

Fünfter Abschnitt.

Von den unmöglichen Wurzeln.

Erste Abtheilung.

Ueber die Mittel, zu erkennen, ob eine Gleichung imaginaire Wurzeln hat.

28.

Im §. 8. fanden wir die allgemeinen Ausdrücke, vermittelst welcher sich aus einer beliebigen gegebenen Gleichung eine andere finden lässt, deren Wurzeln die Quadrate der Differenzen der Wurzeln der gegebenen sind. Sind nun alle Wurzeln einer gegebenen Gleichung reell, so sind offenbar die Quadrate ihrer Differenzen alle positiv, [*denn wenn auch die Differenzen selbst zum Theil negativ seyn können, so sind doch die Quadrate derselben immer positiv,*] also muss in diesem Falle die Gleichung, deren Wurzeln die Quadrate der Differenzen sind, und die wir, der Kürze wegen, Differenzen-Gleichung nennen wollen, weil sie nur positive Wurzeln hat, nothwendig abwechselnd positive und negative Glieder haben [§. 7.]. Ist dieses nicht der Fall,

so hat die gegebene Gleichung nothwendig imaginaire Wurzeln. [*Man weiss aber noch nicht, wie viele.*]

29.

Da ferner die unmöglichen Wurzeln immer paarweise vorhanden sind und auf die Form

73. $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ und $\alpha - \beta\sqrt{-1}$

gebracht werden können, wo α und β reelle Grössen sind (man sehe den neunten Zusatz), so folgt, dass die Differenz zweier correspondirenden unmöglichen Wurzeln nothwendig von der Form $2\beta\sqrt{-1}$, also das Quadrat dieser Differenz von der Form $-4\beta^2$, das heisst eine negative reelle Grösse ist. Hat also die gegebene Gleichung unmögliche Wurzeln, so muss die Differenzen-Gleichung nothwendig eben so viele reelle negative Wurzeln haben, als Paare unmöglicher Wurzeln in der gegebenen Gleichung enthalten sind.

30.

Nun wird im achten Zusatz bewiesen, dass eine Gleichung nie mehr positive Wurzeln als Zeichen-Wechsel, und nie mehr negative Wurzeln als Zeichen-Folgen haben kann. Die Zahl der unmöglichen Wurzeln einer Gleichung kann also nie grösser seyn, als die zwiefache Zahl der Zeichen-Folgen in ihrer Differenzen-Gleichung. [*Indessen bestimmt dieses noch nicht, wie gross die Zahl der unmöglichen Wurzeln der gegebenen Gleichung sey.*]

Von den unmöglichen

31.

Hieraus und aus dem Obigen folgt, dass nothwendig alle Wurzeln einer gegebenen Gleichung reell sind, wenn ihre Differenzen-Gleichung lauter Zeichenwechsel hat. Im entgegengesetzten Falle hat sie unmögliche Wurzeln. Man kann also immer [*aus der Differenzen-Gleichung*] sehen, ob eine gegebene Gleichung unmögliche Wurzeln hat, oder nicht; [*nicht aber wieviel. Dieses ist in einzelnen Fällen erst nach der folgenden Abtheilung möglich.*]

Zweite Abtheilung.

Kennzeichen der Zahl der unmöglichen Wurzeln in gewissen Fällen.

32.

Man bezeichne die reellen Wurzeln einer gegebenen Gleichung durch

$$a,\ b,\ c,\ d \ldots.$$

die unmöglichen durch

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},\ \alpha - \beta\sqrt{-1}$$
$$\gamma + \delta\sqrt{-1},\ \gamma - \delta\sqrt{-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

so sind die Quadrate ihrer Differenzen

Wurzeln.

$$74.\quad\left\{\begin{array}{l}
(a-b)^2,\ (a-c)^2,\ (a-d)^2\ \ldots.\\
(b-c)^2,\ (b-d)^2\ \ldots.\\
(c-d)^2\ \ldots.\\
\qquad -4\beta^2,\ -4\delta^2\ \ldots.\\
(\alpha-a+\beta\sqrt{-1})^2,\ (\alpha-a-\beta\sqrt{-1})^2\\
(\alpha-b+\beta\sqrt{-1})^2,\ (\alpha-b-\beta\sqrt{-1})^2\\
(\alpha-c+\beta\sqrt{-1})^2,\ (\alpha-c-\beta\sqrt{-1})^2\\
(\alpha-d+\beta\sqrt{-1})^2,\ (\alpha-d-\beta\sqrt{-1})^2\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(\gamma-a+\delta\sqrt{-1})^2,\ (\gamma-a-\delta\sqrt{-1})^2\\
(\gamma-b+\delta\sqrt{-1})^2,\ (\gamma-b-\delta\sqrt{-1})^2\\
(\gamma-c+\delta\sqrt{-1})^2,\ (\gamma-c-\delta\sqrt{-1})^2\\
(\gamma-d+\delta\sqrt{-1})^2,\ (\gamma-d-\delta\sqrt{-1})^2\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(\alpha-\gamma+(\beta-\delta)\sqrt{-1})^2,\ (\alpha-\gamma-(\beta-\delta)\sqrt{-1})^2\\
(\alpha-\gamma+(\beta+\delta)\sqrt{-1})^2,\ (\alpha-\gamma-(\beta+\delta)\sqrt{-1})^2\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}\right.$$

welches also die Wurzeln der Differenzen-Gleichung sind.

Der Grad der gegebenen Gleichung sey m, so dass also auch die Zahl der Wurzeln $a, b, c\ldots.$, $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $\alpha-\beta\sqrt{-1}$, $\gamma+\delta\sqrt{-1}$, $\gamma-\delta\sqrt{-1}\ldots.$ m ist, so ist der Grad der Differenzen-Gleichung $n=\frac{m(m-1)}{2}$ (§. 8.). Die Zahl der reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung $a, b, c\ldots.$ sey gleich p, die Zahl der unmöglichen $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $\alpha-\beta\sqrt{-1}$,

$\gamma + \delta \sqrt{-1}$, $\gamma - \delta \sqrt{-1}$ gleich $2q$, so dass $m = p + 2q$; so ist aus der obigen Tafel (74.) leicht zu sehen, dass unter den n Wurzeln der Differenzen-Gleichung nothwendig $\frac{p(p-1)}{2}$ reelle positive, q reelle negative und $2q(p+q-1)$ unmögliche Wurzeln sind. [*Denn die reellen positiven Wurzeln entstehen durch Verbindung der reellen Wurzeln unter einander, und zwar entstehen daraus lauter positive und keine negative Wurzeln, weil die Wurzeln der Differenzen-Gleichung die Quadrate der Unterschiede der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind. Die Zahl der reellen positiven Wurzeln ist also nothwendig* $\frac{p(p-1)}{2}$, *weil jede Wurzel sich mit den übrigen Wurzeln verbinden lässt, welches* $p(p-1)$ *Resultate giebt, unter welchen aber jedes zweimal vorkommt. Die reellen negativen Wurzeln entstehen blos durch Verbindung je zwei zusammengehöriger unmöglicher Wurzeln, wie* $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ *und* $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, *und nur der Unterschied zwei solcher Wurzeln ist eine ganz unmögliche Grösse, deren Quadrat negativ ist. Also giebt es in der Differenzen-Gleichung nur so viele reelle negative Wurzeln, als Paare unmöglicher Wurzeln vorhanden sind, mithin q. Die Zahl der unmöglichen Wurzeln bleibt übrig, wenn man die Zahl der positiven und negativen reellen Wurzeln von der Gesammtzahl der Wurzeln abzieht. Die letzte ist* $\frac{m(m-1)}{2}$,

Wurzeln.

also weil $m = p + 2q$ *ist, gleich* $\frac{(p+2q)(p+2q-1)}{2}$
$= \frac{1}{2}p^2 + 2pq + 2q^2 - \frac{1}{2}p - q$. *Zieht man von dieser die Zahl der positiven reellen Wurzeln* $\frac{p(p-1)}{2} = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}p$ *und die Zahl* q, *der negativen reellen Wurzeln ab, so bleibt*

$$\frac{1}{2}p^2 + 2pq + 2q^2 - \frac{1}{2}p - q - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p - q$$
$$= 2pq + 2q^2 - 2q,$$

oder $2q(p+q-1)$ *für die Zahl der unmöglichen Wurzeln übrig, wie im Text.*]

33.

Man multiplicire alle diese Wurzeln in einander, so ist klar, dass das Product der $\frac{p(p-1)}{2}$ positiven Wurzeln immer positiv, das Product der q negativen Wurzeln positiv oder negativ seyn wird, je nachdem q eine gerade oder ungerade Zahl ist. Das Product der $2q(p+q-1)$ unmöglichen Wurzeln hingegen, ist immer positiv, weil sie paarweise da sind und die Form $(A + B\sqrt{-1})^2$ und $(A - B\sqrt{-1})^2$ haben, wovon das Product, paarweise $(A^2 + B^2)^2$ ist, welches [*als Quadrat*] immer positiv ist, so dass das Product sämmtlicher unmöglichen Wurzeln [*der Differenzen-Gleichung*] immer positiv ist.

Das Product sämmtlicher Wurzeln [*der Differenzen-Gleichung*] ist also positiv oder negativ, je nachdem q gerade oder ungerade ist.

Nun ist, wie bekannt, das letzte Glied einer Glei-

chung allemal dem Producte aller ihrer Wurzeln gleich, positiv und negativ genommen, je nachdem die Zahl der Wurzeln gerade oder ungerade ist [*wie aus der Gleichung* (1.) *zu sehen*].

Das letzte Glied der Differenzen-Gleichung vom Grade n ist also nothwendig positiv, wenn n und q beide gerade oder beide ungerade sind, und negativ, wenn von n und q, eins gerade, das andere ungerade ist. [*Nämlich wie aus der Gleichung* (1.) *zu sehen, hat das letzte Glied das nämliche Zeichen, wie das Product sämmtlicher Wurzeln, wenn ihre Zahl gerade ist, denn das aus*

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots.=0$$

entstehende letzte Glied der Gleichung ist $+\alpha\beta\gamma\ldots.$ *wenn die Zahl der Grössen* $\alpha, \beta, \gamma\ldots.$ *gerade, und* $-\alpha\beta\gamma\ldots.$, *wenn sie ungerade ist. Das letzte Glied der Gleichung hat also im ersten Falle mit dem Werthe des Products sämmtlicher Wurzeln* $\alpha\beta\gamma\ldots.$ *an sich, einerlei, im letzten Falle verschiedene Zeichen. Nun ist bewiesen, dass das Product sämmtlicher Wurzeln der Differenzen-Gleichung an sich positiv ist, wenn* q *gerade, und negativ, wenn* q *ungerade ist; also ist das letzte Glied der Differenzen-Gleichung positiv, wenn die Zahl* n *ihrer Wurzeln und* q *beide gerade oder beide ungerade sind, und negativ im andern Falle. Denn, gesetzt die Zahl der Wurzeln* n *sey gerade, so hat ihr Product mit dem letzten Gliede der Gleichung einerlei Zeichen. Nun ist solches, wenn* q *gerade ist, positiv,*

Wurzeln.

also ist auch das letzte Glied positiv. Ist n ungerade, so haben ihre Producte und das letzte Glied der Gleichung verschiedene Zeichen. Nun ist solches, wenn q ungrade ist, negativ, also ist das letzte Glied wieder nothwendig positiv u. s. w.]

34.

Sind nun n und q beide gerade oder beide ungerade, so ist $n - q$ nothwendig gerade. Sind n und q, das eine gerade, das andere ungerade, so ist $n - q$ nothwendig ungerade. Es ist aber, wegen $n = \frac{m(m-1)}{2}$ und $m = p + 2q$, $n - q = \frac{p(p-1)}{2} + 2q(p+q-1)$. [*Denn n ist die Zahl der sämmtlichen Wurzeln der Differenzen-Gleichung, q ist die Zahl der negativen Wurzeln. Zieht man letztere von ersterer ab, so bleibt die Zahl der positiven und der unmöglichen Wurzeln übrig. Erstere war* $\frac{p(p-1)}{2}$, *letztere* $2q(p+q-1)$, *also ist* $n - q = \frac{p(p-1)}{2} + 2q(p+q-1)$.] Die Zahl $n - q$ ist also nothwendig gerade oder ungerade, je nachdem $\frac{p(p-1)}{2}$ gerade oder ungerade ist. [*Denn in dem Ausdruck* $\frac{p(p-1)}{2} + 2q(p+q-1)$ *von* $n-q$ *ist der Theil* $2q(p+q-1)$ *immer gerade, weil man den Factor 2 hat, also ist* $n-q$ *gerade oder ungerade, je nachdem der übrige Theil* $\frac{p(p-1)}{2}$ *es ist.*]

Von den unmöglichen

Das letzte Glied der Differenzen-Gleichung ist also nothwendig positiv oder negativ, je nachdem $\frac{p(p-1)}{2}$ gerade oder ungerade ist, das heisst, je nachdem die Zahl der Verbindungen der reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung [*deren Zahl p ist*] zu zweien, gerade oder ungerade ist. [*Denn nach* §. 33. *ist das letzte Glied der Differenzen-Gleichung positiv oder negativ, je nachdem n und q beide gerade oder ungerade sind, oder das eine gerade, das andere ungerade ist, das heisst, je nachdem n — q gerade oder ungerade ist. Nun ist nach* §. 34. *letzteres der Fall, je nachdem* $\frac{p(p-1)}{2}$ *gerade oder ungerade ist, also ist das letzte Glied der Differenzen-Gleichung positiv oder negativ, je nachdem* $\frac{p(p-1)}{2}$ *gerade oder ungerade ist.*]

35.

Man setze

Erstlich, das letzte Glied der Differenzen-Gleichung sey positiv, so muss also $\frac{p(p-1)}{2}$ gerade seyn, folglich muss entweder $\frac{p}{2}$ [*eine gerade Zahl*] $= 2\lambda$, und mithin $p = 4\lambda$, oder es muss $\frac{p-1}{2}$ [*eine gerade Zahl*] $= 2\lambda$, und folglich $p = 4\lambda + 1$ seyn. Hieraus folgt, dass in diesem Falle [*nämlich, wenn das letzte Glied der Differenzen-Gleichung positiv ist*] die Zahl p der reellen Wurzeln der gegebenen

nen Gleichung, wenn sie eine gerade ist, das heisst wenn die Ordnungs-Zahl der gegebenen Gleichung selbst gerade ist, nothwendig ein Vielfaches von 4 seyn muss; hingegen ein Vielfaches von 4 und noch 1 dazu, wenn die Ordnungs-Zahl der gegebenen Gleichung ungerade ist. [*Nemlich, wenn die Ordnungs-Zahl der Gleichung gerade ist, so kann nur eine gerade Zahl, wenn sie ungerade ist, nur eine ungerade Zahl von reellen Wurzeln Statt finden, weil die Zahl der unmöglichen Wurzeln immer gerade ist. Ist daher die Ordnungs-Zahl der Gleichung gerade, so ist p gerade; ist sie ungerade, so ist p ungerade, oder $p-1$ gerade. Nun müsste, wenn $\frac{p(p-1)}{2}$ gerade seyn soll, entweder $\frac{p}{2}=2\lambda$, oder $\frac{p-1}{2}=2\lambda$ seyn. Da p allemal eine ganze Zahl ist, so findet $\frac{p}{2}$ nur statt, wenn p gerade, und $\frac{p-1}{2}$ nur wenn p ungerade ist, also $\frac{p}{2}$ nur dann, wenn die Ordnungs-Zahl der gegebenen Gleichung gerade, $\frac{p-1}{2}$ nur dann, wenn sie ungerade ist. Da nun $\frac{p}{2}=2\lambda$, $p=4\lambda$ und $\frac{p-1}{2}=2\lambda$, $p=4\lambda+1$ giebt, wo λ eine beliebige ganze Zahl bedeutet, so folgt, dass die Zahl der reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung p, wenn die Ordnungs-Zahl der Gleichung gerade ist, nur ein Vielfaches von 4, hingegen wenn die Ordnungs-Zahl der gegebenen Gleichung ungerade ist, nur*

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

Von den unmöglichen

ein Vielfaches von 4, *plus* 1 *seyn kann. Die beliebige Zahl des Vielfachen wird durch* λ *ausgedrückt.*] Es ist also unmöglich, dass die gegebene Gleichung 2, 3, 6, 7 etc. reelle Wurzeln hat, [*wenn das letzte Glied ihrer Differenzen-Gleichung positiv ist. Denn da die Zahl* p *der reellen Wurzeln in diesem Falle nur* 0 *oder* 1, 4 *oder* 5, 8 *oder* 9 *u. s. w. seyn kann, so kann sie nicht* 2, 3, 6, 7 *etc. seyn.*]

Man setze

Zweitens, das letzte Glied der Differenzen-Gleichung sey negativ, so muss $\frac{p(p-1)}{2}$ negativ, mithin $\frac{p}{2} = 2\lambda + 1$, das heisst, $p = 4\lambda + 2$, oder $\frac{p-1}{2} = 2\lambda + 1$, oder $p = 4\lambda + 3$ seyn; woraus folgt, dass in diesem Falle die Zahl p der reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung nothwendig ein Vielfaches von 4, plus 2 seyn muss, wenn die Ordnungs-Zahl der gegebenen Gleichung gerade, und ein Vielfaches von 4, plus 3, wenn dieselbe ungerade ist [*aus ähnlichen Gründen, wie oben*]. Es ist also unmöglich, dass die gegebene Gleichung in diesem Falle [*wenn das letzte Glied ihrer Differenzen-Gleichung negativ ist,*] 1, 4, 5, 8, 9 *etc.* sey.

36.

Es lässt sich also an den Zeichen [*der verschiedenen Glieder, nicht etwa blos des so eben aus-*

schliesslich in Betracht gezogenen letzten Gliedes] der Differenzen-Gleichung erkennen:

Erstlich, ob alle Wurzeln der gegebenen Gleichung reell sind oder nicht [*nach §. 28. nämlich daran, ob die Differenzen-Gleichung lauter Zeichenfolgen hat oder nicht*].

Zweitens, ob die Zahl der reellen Wurzeln eine von den Zahlen 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13 *etc.* oder eine von den Zahlen 2, 3, 6, 7, 10, 11 *etc.* ist [*nach §. 35.*], welches hinreicht, um bei Gleichungen, die den fünften Grad nicht übersteigen, oder von welchen man sonst im Voraus weiss, dass die Zahl ihrer unmöglichen Wurzeln nicht grösser als vier ist, die Zahl der unmöglichen Wurzeln selbst zu finden.

[*Die gegebene Gleichung sey z. B. vom fünften Grade, so sieht man zuerst darauf, ob ihre Differenzen-Gleichung lauter Zeichenwechsel hat, oder nicht, ob alle fünf Wurzeln reel sind, oder nicht. Im ersten Falle hat die Gleichung keine unmögliche Wurzeln. Im andern Falle sehe man zu, ob das letzte Glied der zugehörigen Differenzen-Gleichung positiv oder negativ ist. Ist solches positiv, so kann die Zahl der reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung, nach (§. 35. I.), nur* 1, 4, 5, 8, 9 *etc., also in dem gegenwärtigen Fall nur* 1 *oder* 4, *folglich die Zahl der unmöglichen Wurzeln nur* 4 *oder* 1 *seyn. Eine einzelne unmögliche Wurzel findet aber nicht Statt, weil die unmöglichen Wurzeln immer paarweise vorhanden sind; also kann die gegebene Gleichung vom*

Von den unmöglichen

fünften Grade, wenn ihre Differenzen-Gleichung nicht lauter Zeichenwechsel hat und das letzte Glied derselben positiv ist, nur v i e r *unmögliche Wurzeln haben. Ist das letzte Glied der Differenzen-Gleichung negativ, so kann die Zahl der reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung, nach (§. 35. II.), nur 2, 3, 6, 7 etc., also in dem gegenwärtigen Fall nur 2 oder 3, folglich die Zahl der unmöglichen Wurzeln der gegebenen Gleichung nur 3, oder 2, und folglich, weil diese Zahl nur gerade seyn kann, nur* z w e i *seyn.*

Die gegebene Gleichung sey von einem beliebigen Grade μ, man wisse aber im Voraus, dass die Zahl ihrer unmöglichen Wurzeln nicht grösser als v i e r *ist. Die Differenzen-Gleichung zeigt erstlich, wenn nicht die Zeichen* a l l e r *ihrer Glieder abwechseln,* d a s s *die gegebene Gleichung unmögliche Wurzeln hat. Ist nun das letzte Glied der Differenzen-Gleichung positiv, so kann die gegebene Gleichung, nach (§. 35. I.), nur 1, 4, 5, 8, 9 etc. reelle, also nur $\mu - 1$, $\mu - 4$, $\mu - 5$, $\mu - 8$, $\mu - 9$ etc. unmögliche Wurzeln haben. Von diesen verschiedenen Zahlen der unmöglichen Wurzeln kann aber immer nur eine Statt finden, denn nur die beiden letzten sind nicht grösser als 4, wie es der Voraussetzung gemäss seyn soll, eine von diesen beiden aber ist immer ungerade und folglich ebenfalls noch ausgenommen, mithin bleibt nur eine einzige übrig, welche dann die bestimmte Zahl der unmöglichen Wurzeln der gegebenen*

Gleichung ist. Ist das letzte Glied der Differenzen-Gleichung negativ, so kann, nach (§. 35. II.), die Zahl der reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung nur 2, 3, 6, 7 etc., also die Zahl der unmöglichen Wurzeln nur $\mu-2$, $\mu-3$, $\mu-6$, $\mu-7$ etc. seyn, wovon auf dieselbe Weise, wenn die Zahl der unmöglichen Wurzeln nicht grösser als vier seyn soll, wieder nur eine einzige Statt findet.]

Vielleicht lassen sich, wenn man diese Untersuchungen fortsetzt, sichere Regeln zur Bestimmung der Zahl der reellen Wurzeln in Gleichungen von beliebigen Graden finden. Die bisherigen Regeln sind entweder unzulänglich, wie die von Newton, Maclaurin etc., oder nicht anwendbar, weil sie die Auflösung von Gleichungen niedriger Ordnungen voraussetzen, wie die von Striling, de Gua etc.

Dritte Abtheilung.

Anwendung der obigen Theorie auf die Gleichungen des zweiten, dritten und vierten Grades.

37.

Die gegebene Gleichung sey vom zweiten Grade, wie

$$75. \quad x^2 - Ax + B = 0$$

so ist ihre Differenzen-Gleichung vom Grade $\frac{2.1}{2} = 1$, und man findet, nach (§. 8.), dass dieselbe

Von den unmöglichen

$$v - a = 0$$

ist, wo

$$a = A^2 - 4B.$$

Die Wurzeln sind also beide reell, oder beide imaginair, je nachdem $A^2 - 4B > 0$ oder < 0 ist. Sie sind einander gleich, wenn

$$A^2 = 4B$$

ist.

38.

Die gegebene Gleichung sey die allgemeine Gleichung des dritten Grades

$$76. \quad x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0,$$

so ist ihre Differenzen-Gleichung vom Grade $\frac{3.2}{2} = 3$, und man findet auf die nemliche Weise [*nach §. 8.*]

$$77. \quad v^3 - av^2 + bv - c = 0,$$

wo

$$78. \begin{cases} a = 2(A^2 - 3B) \\ b = (A^2 - 3B)^2 \\ c = \frac{4}{3}(A^2 - 3B)(B^2 - 3AC) - \frac{1}{3}(9C - AB)^2 \end{cases}$$

ist. Es muss also, wenn alle Wurzeln der gegebenen Gleichung reell seyn sollen,

$$79. \begin{cases} \text{Erstlich, } A^2 - 3B > 0 \\ \text{Zweitens, } 4(A^2 - 3B)(B^2 - 3AC) - (9C - AB)^2 > 0 \end{cases}$$

seyn. Wird eine dieser Bedingungen nicht erfüllt, so hat die Gleichung zwei unmögliche Wurzeln. [*Wenn nämlich alle Wurzeln der gegebenen Gleichung reell seyn sollen, so muss die Gleichung lauter Zeichenwechsel haben* (§. 28.). *Dieses ist*

Wurzeln.

möglich, weil der Coefficient des ersten Gliedes v^3 positiv vorausgesetzt wird und alsdann auch der Coefficient des dritten Gliedes $b=(A^2-3B)^2$ nothwendig positiv ist, weil er aus einem Quadrate besteht. Lauter Zeichenwechsel finden also dann Statt, wenn a und α ebenfalls positiv sind, welches die Bedingungen (79.) ausdrücken. Hat die gegebene Gleichung nicht lauter Zeichenwechsel, so hat sie nothwendig unmögliche Wurzeln (§. 31.), und da deren nicht weniger als zwei seyn können, nothwendig zwei dergleichen.]

39.

Es sey die allgemeine Gleichung des vierten Grades

$$80.\quad x^4+Bx^2-Cx+D=0$$

gegeben, deren zweites Glied, der Kürze wegen, weggeschafft ist, so ist ihre Differenzen-Gleichung vom Grade $\frac{4\cdot 3}{2}=6$, so dass sie durch

$$81.\quad v^6-av^5+bv^4-cv^3+dv^2-ev+f=0$$

ausgedrückt werden kann. Nach §. 8. findet man

$$82.\quad \begin{cases} a=-8B \\ b=22B^2+8D \\ c=-18B^3+16BD+26C^2 \\ d=17B^4+24B^2D-7.16D^2+3.16BC^2 \\ e=-4B^5-2.27C^2B^2-8.27C^2D+3.4^3BD^2 \\ \qquad -2.4^2B^3D \\ f=4^4D^3-2^3.4^2B^2D^2+4^2.3^2C^2BD+4^2B^4D \\ \qquad -4C^2B^3-3^3C^4. \end{cases}$$

Von den unmöglichen

Ist also

Erstlich, die Grösse

$$f = 4^4 D^3 - 2^3 . 4^2 B^2 D^2 + 4^2 . 3^2 C^2 BD + 4^2 B^4 D - 4 C^2 B^3 - 3^3 C^4$$

[*nämlich das letzte Glied der Differenzen-Gleichung*] negativ, so hat die gegebene Gleichung nothwendig zwei reelle und zwei imaginaire Wurzeln. [*Denn da alsdann ein Zeichenwechsel fehlt, so hat sie überhaupt imaginaire Wurzeln, folglich, weil diese nur paarweise vorhanden seyn können, wenigstens zwei. Sie kann aber nur zwei imaginaire Wurzeln haben, weil nur* 2, 3, 6, 7, 10, 11 *etc., also nicht* 0 *reelle Wurzeln existiren können* (*§.* 35. *I.*).]

Ist die Grösse f positiv, so hat die gegebene Gleichung entweder lauter reelle, oder lauter imaginaire Wurzeln. [*Denn sie kann alsdann nur* 0 *oder* 1 *oder* 4 *reelle Wurzeln haben* (*§.* 35. *II.*), *wovon der Fall mit einer Wurzel wegfällt, weil nicht* 3 *imaginaire Wurzeln existiren können.*]

Nun sind alle Wurzeln der gegebenen Gleichung reell, wenn die Werthe aller Coefficienten a, b, c, d, e, f positiv sind [*weil dann die Differenzen-Gleichung lauter Zeichenwechsel hat*]. Die Wurzeln der gegebenen Gleichung sind also alle imaginair, wenn, während der letzte Coefficient f positiv ist, irgend einer von den übrigen es nicht ist.

Wir wollen also den Coefficienten f positiv setzen, so dass

Wurzeln.

83. $4^4 D^3 - 2^3 . 4^2 B^2 D^2 + 4^2 . 3^2 C^2 B D + 4^2 B^4 D$
$$- 4 C^2 B^3 - 3^2 C^4 > 0$$

ist, so wird man finden, dass auch alle andern Coefficienten positiv sind, sobald

84. $B < 0$ und $B^2 - 4D > 0$

ist. Hingegen ist irgend einer von ihnen nothwendig negativ, sobald

85. $B > 0$ oder $B^2 - 4D < 0$

ist. Im ersten Fall also wären alle vier Wurzeln der Gleichung reell, im zweiten sämmtlich imaginair. [*Es wäre wohl zu wünschen, dass Lagrange diesen Satz etwas näher auseinander gesetzt hätte. Dass die Grössen a, b und c unter den angenommenen Bedingungen nothwendig positiv sind, ist leicht zu zeigen. Wenn nämlich* $B < 0$ *und* $B^2 - 4D > 0$, *das heisst, B negativ und* $4D < B^2$ *ist, so ist*

Erstlich $a = -8B$ *nothwendig positiv, weil B negativ ist.*

Zweitens ist $b = 22B^2 + 8D$ *nothwendig positiv, weil* B^2 *als Quadrat an sich positiv,* $8D$ *aber, auch wenn D negativ wäre, nach der Voraussetzung, dass* $4D < B^2$ *seyn soll, nicht grösser als* $-2B^2$ *seyn kann, so dass für* $b = 22B^2 + 8D$ *in jedem Falle die positive Grösse* $20B^2$ *übrig bleibt.*

Drittens, in $c = -18B^3 + 16BD + 26C^2$ *sind die Glieder* $-18B^2$ *und* $26C^2$ *immer positiv, weil* C^2 *ein Quadrat und B nach der Voraussezzung negativ, also* $-18B^3$ *positiv ist. Das dritte*

Von den unmöglichen

Glied, $16BD$, *ist von selbst positiv, wenn* D *negativ ist, weil* B *negativ seyn soll. Ist hingegen* D *positiv, so ist zwar* $16BD$ *negativ, aber da das positive* $4D < B^2$ *seyn soll, nur etwa* $4D = B^2 - K$, *wo* K *irgend eine positive Grösse ist. Dieses giebt* $16BD = 4B^3 - 4BK$, *also* $c = -14B^3 - 4BK + 26C^2$, *welches nothwendig positiv ist, weil* B *negativ und* K *positiv seyn soll.*

Aber von den beiden übrigen Grössen d und e fällt die Behauptung weniger in die Augen; denn da das immer positive C^2 *auch mit dem Zeichen — vorkommt, so muss man für den Werth von* C^2 *nothwendig irgend eine Bestimmung haben, die sich nur aus der dritten Bedingung* $f > 0$ *nehmen lässt. Hierbei aber verfällt man in Schwierigkeiten. Der Ausdruck von* f *nämlich giebt*

$$27C^4 + 4C^2B^2 - 144C^2BD - 16B^4D + 128B^2D^2 - 256D^3 + f = 0.$$

Wenn nun die Coefficienten immer positiv seyn sollen, so lange $B < 0$ *und* $B^2 - 4D > 0$ *ist, so sind sie es auch noch, wenn man z. B.* $B^2 = 4D$ *setzt, weil* B^2 *der Grösse* $4D$ *so nahe kommen kann, als man will. Dieses giebt*

$$27C^4 + 4C^2B^3 - 36C^2B^3 - 4B^6 + 8B^6 - 4B^6 + f = 0,$$

oder

$$27C^4 - 32C^2B^3 + f = 0.$$

Da nun B *negativ und* f *positiv seyn soll, so sind alle drei Glieder dieser Gleichung positiv, und folglich kann* C^2 *gar keine positive Grösse seyn, wie es seyn soll.*

Wurzeln.

Auch wenn man $B = 0$ *und* $B = 4D$, *also auch* $D = 0$ *setzt, welches ebenfalls geschehen darf, weil* B *der Null und* B^2 *dem* $4D$ *so nahe kommen kann als man will; findet man, dass* C^2 *alsdann nicht positiv seyn kann. Denn man erhält*

$$27C^4 + f = 0,$$

welches für $27C^4$, $-f$, *also eine negative Grösse giebt, woraus für C ein imaginairer Werth, gegen die Voraussetzung, folgt; so dass also umgekehrt* f *gar nicht positiv gesetzt werden kann, wenn B und D Null sind, wovon der Grund nicht klar ist. Auch wenn man blos* $B = 0$ *und* $-4D > 0$, *also D negativ setzt, so dass die gegebene Gleichung von der Form*

$$x^4 - Cx + D = 0$$

ist, fällt die Richtigkeit der Resultate nicht in die Augen. Man findet nämlich alsdann

$$a = 0$$
$$b = 8D$$
$$c = 26C^2$$
$$d = -7.16D^2$$
$$e = -8.27C^2D$$
$$f = 4^4D^3 - 3^3C^4,$$

so dass also b negativ, c positiv, d negativ, e positiv und f negativ wären und folglich, weil auf diese Weise die Differenzen-Gleichung,

$$v^6 - av^5 + bv^4 - cv^3 + dv^2 - ev + f = 0,$$

nicht lauter Zeichenwechsel hätte, nicht sämmtliche Wurzeln der gegebenen Gleichung reell seyn

Von den unmöglichen

könnten. Setzt man hingegen $B = 0$ *und* $-4D < 0$, *also D positiv, so ist b positiv, c negativ, d positiv, e negativ und f positiv, und die gegebene Gleichung würde lauter reelle Wurzeln haben, welches der Behauptung entgegen zu seyn scheint.*

Unter diesen Umständen ist es sehr zu bedauern, dass sich der Beweis des Satzes hier nicht findet.]

Man könnte auf eine ähnliche Weise die Bedingungen suchen, unter welchen die Wurzeln der Gleichungen fünften Grades alle reell, oder zum Theil reell, zum Theil imaginair sind. Da aber in diesem Falle die Differenzen-Gleichung schon auf den $\frac{5 \cdot 4}{2} =$ 10ten Grad steigt, so ist die alsdann nöthige Rechnung schon ausserordentlich weitläuftig und beschwerlich.

Vierte Abtheilung.

Ueber die Entwickelung der imaginairen Wurzeln einer Gleichung.

40.

Wir sahen in der zweiten Abtheilung [§. 32.], dass zu jedem zusammengehörigen Paare von imaginairen Wurzeln, wie $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ und $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, in der Differenzen-Gleichung nothwendig die reelle negative Wurzel $-4\beta^2$ gehört, woraus folgt, dass sich aus den reellen negativen Wurzeln der Differen-

zen-Gleichung die Werthe von $-4\beta^2$, und folglich von β, also nach §. 17. die zugehörigen Werthe von α finden lassen, so dass man den Ausdruck der imaginairen Werthe der gegebenen Gleichung erhält, welches z. B. in der Integral-Rechnung nöthig ist. Wir wollen eine diesen Gegenstand betreffende Bemerkung beifügen, welche über die Theorie desselben mehreres Licht verbreiten und etwanige Bedenken gegen ihre Richtigkeit und Allgemeinheit heben wird.

41.

Wenn die reellen Theile der imaginairen Wurzeln

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}$$
$$\alpha - \beta\sqrt{-1}$$
$$\gamma + \delta\sqrt{-1}$$
$$\gamma - \delta\sqrt{-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

sowohl unter einander als von den reellen Wurzeln a, b, c.... verschieden sind, so kann die Differenzen-Gleichung, wie aus der Tafel der zweiten Abtheilung [§. 32.] leicht zu sehen, keine andern reellen imaginairen Wurzeln als $-4\beta^2$, $-4\delta^2$ *etc.* haben; die Zahl dieser Wurzeln ist also der Zahl der Paare imaginairer Wurzeln in der gegebenen Gleichung gleich.

Sind hingegen die Grössen α, γ.... zum Theil unter sich oder den Grössen a, b, c.... gleich, so hat die Differenzen-Gleichung nothwendig mehr negative Wurzeln, als die gegebene Gleichung Paare imaginairer Wurzeln hat.

Es sey z. B. $a = \alpha$, so gehen die beiden imaginairen Wurzeln $(a - \alpha + \beta\sqrt{-1})^2$, $(\alpha - a - \beta\sqrt{-1})^2$ in $-\beta^2$ und $-\beta^2$ über und sind folglich ebenfalls reelle negative Wurzeln.

Hat also z. B. die gegebene Gleichung nur die beiden imaginairen Wurzeln $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ und $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, so hat die Differenzen-Gleichung, im Fall $\alpha = a$ ist, ausser der reellen negativen Wurzel $-4\beta^2$, noch die beiden reellen, einander gleichen, negativen Wurzeln $-\beta^2$ und $-\beta^2$.

Daraus folgt, dass, wenn die Differenzen-Gleichung drei reelle negative Wurzeln hat, von welchen zwei einander gleich sind, dann die gegebene Gleichung drei Paare oder blos ein Paar imaginairer Wurzeln haben kann.

Hat die gegebene Gleichung vier imaginaire Wurzeln, $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, $\gamma + \delta\sqrt{-1}$, $\gamma - \delta\sqrt{-1}$, so hat die Differenzen-Gleichung erstlich die beiden reellen negativen Wurzeln $-4\beta^2$, $-4\delta^2$; und ist alsdann noch $\alpha = a$, so hat sie auch noch die beiden reellen negativen Wurzeln $-\beta^2$ und $-\beta^2$; ist ferner $\gamma = b$, so hat sie noch die beiden reellen negativen Wurzeln $-\delta^2$ und $-\delta^2$. Wäre $\alpha = \gamma$, so gingen die vier imaginairen Wurzeln

$$(\alpha - \gamma - (\beta - \delta)\sqrt{-1})^2,\ (\alpha - \gamma - (\beta - \delta)\sqrt{-1})^2$$
$$(\alpha - \gamma + (\beta + \delta)\sqrt{-1})^2,\ (\alpha - \gamma - (\beta + \delta)\sqrt{-1})^2$$

in

$$-(\beta - \delta)^2,\ -(\beta - \delta)^2,\ -(\beta + \delta)^2,\ -(\beta + \delta)^2$$

über, welche Wurzeln sämmtlich reell und negativ, aber paarweise einander gleich sind.

Wurzeln.

42.

Hieraus folgt leicht:

Erstlich, dass, wenn alle reellen negativen Wurzeln der Differenzen-Gleichung unter einander ungleich sind, die gegebene Gleichung nothwendig eben so viele Paare imaginairer Wurzeln haben muss.

Nennt man irgend eine jener [*reellen negativen*] Wurzeln [*der Differenzen-Gleichung*] $-w$, so ist $\beta = \frac{\sqrt{w}}{2}$ [*weil* $-4\beta^2 = -w$]. Substituirt man diesen Werth in die beiden Gleichungen (§. 17.), so darf man dann nur ihren grössten Divisor suchen und die Division fortsetzen, bis man auf einen Rest kommt, welcher α nur noch in einer Abmessung enthält. Setzt man diesen Rest gleich Null, so erhält man den zu β gehörigen Werth von α. Und auf diese Weise giebt dann jede negative Wurzel $-w$ zwei imaginaire Wurzeln $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ und $\alpha - \beta\sqrt{-1}$.

Zweitens folgt, dass, wenn unter den reellen negativen Wurzeln der Differenzen-Gleichung gleiche Wurzeln sind, jede andere ungleiche Wurzel, wie vorhin, zu einem Paare imaginairer Wurzeln gehört, jedes Paar gleicher Wurzeln aber ebenfalls nur zwei Paare imaginairer Wurzeln oder keine geben kann; so dass zwei gleiche Wurzeln vier imaginaire Wurzeln geben, oder keine; drei gleiche Wurzeln, sechs oder zwei imaginaire Wurzeln; vier gleiche Wurzeln, acht oder vier imaginaire Wurzeln u. s. w.

Von den unmöglichen

43.

Wenn nun z. B. $-w$ und $-w$ zwei gleiche negative Wurzeln der Differenzen-Gleichung sind, so setze man $\beta = \frac{\sqrt{w}}{2}$, wie oben. Man substituire diesen Werth von β in die Gleichungen (§. 17.), suche ihren gemeinschaftlichen Divisor und setze die Division so lange fort, bis man auf einen Rest kommt, welcher α noch in der zweiten Abmessung enthält, weil der Werth von β, wie wir oben sahen, zwiefach ist.

Setzt man darauf diesen Rest gleich Null, so hat man zur Bestimmung von α eine Gleichung des zweiten Grades, welche folglich zwei reelle oder imaginaire Wurzeln hat.

Im ersten Falle bezeichne man diese beiden Wurzeln durch α' und α'', so erhält man die vier imaginairen Wurzeln

$$\alpha' + \beta\sqrt{-1}$$
$$\alpha' - \beta\sqrt{-1}$$
$$\alpha'' + \beta\sqrt{-1}$$
$$\alpha'' - \beta\sqrt{-1}.$$

Da im zweiten Falle die Werthe von α, gegen die Voraussetzung, imaginair sind, so ist dieses ein Zeichen, dass zu den beiden gleichen Wurzeln $-w$ und $-w$ keine imaginairen Wurzeln der gegebenen Gleichung gehören.

44.

Sind in der Differenzen-Gleichung drei gleiche und negative Wurzeln, $-w$, $-w$, $-w$ vorhanden,

so

so darf man nur, nachdem $\beta = \frac{\sqrt{w}}{2}$ gesetzt worden, die Division so lange fortsetzen, bis man auf einen Rest kommt, der α noch in drei Abmessungen enthält, so dass man, wenn man diesen Rest gleich Null setzt, eine Gleichung mit α des dritten Grades findet, aus welcher entweder drei reelle Werthe, oder ein reeller und zwei imaginaire Werthe von α folgen. Im ersten Falle sind sechs imaginaire Wurzeln vorhanden, im zweiten nur zwei. Die imaginairen Werthe von α kommen immer, als der Voraussetzung zuwider, nicht in Betracht.

Näherung durch continuirliche

Sechster Abschnitt.

Ueber die Methode, die Zahlen-Werthe der Wurzeln gegebener Gleichungen durch continuirliche Brüche näherungsweise zu finden.

Wir sahen im dritten Abschnitte, wie sich die Wurzeln numerischer Gleichungen auf continuirliche Brüche bringen lassen, nebst den Vorzügen dieser Reduction. Wir wollen dieser Theorie noch einige Bemerkungen hinzufügen, um sie möglichst zu verallgemeinern.

Erste Abtheilung.

Von den periodischen Kettenbrüchen.

45.

Wir sahen schon im §. 18., dass, wenn die gesuchte Wurzel commensurabel ist, der sie ausdrükkende Kettenbruch nothwendig abbrechen muss, so dass man die Wurzel genau findet. Es giebt aber

noch einen andern Fall, in welchem der Werth der Wurzel, ungeachtet der Kettenbruch kein Ende hat, ebenfalls genau ausgedrückt werden kann. Dieser Fall ist der eines periodischen Kettenbruches, das heisst eines solchen, dessen Nenner bis ins Unendliche immerfort wieder die nemlichen sind, z. B. wie

$$86.\quad p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{p + \cdots}}}}$$

Es ist klar, dass, wenn man den Werth dieses Bruchs durch x bezeichnet,

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{x}}$$

ist, welches die Gleichung [$x = p + \frac{x}{xq+1}$, *oder* $(xq+1)x = p(xq+1) + x$, *oder* $x^2 q + x = pqx + p + x$, *oder*]

$$87.\quad qx^2 - pqx - p = 0$$

giebt, aus welcher sich x finden lässt. Eben so verhält es sich, wenn die Periode mehrere Glieder hätte. Man würde für x immer eine Gleichung des zweiten Grades finden. Es kann auch kommen, dass der Kettenbruch im Anfange irregulair und nur erst an einem gewissen Gliede periodisch ist. Auch in diesem Falle lässt sich sein Werth auf dieselbe Weise finden und hängt immer nur von einer Gleichung des zweiten Grades ab. Denn es sey z. B. der Bruch

Näherung durch continuirliche

88. $p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{r \ldots}}}}}}$

gegeben. Der ganze Bruch werde durch x, und der periodische Theil desselben, nämlich $r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{r + \ldots}}$ durch y bezeichnet, so ist

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{y}},$$

woraus [$x = p + \frac{y}{qy + 1}$, *oder* $(qy+1)x = p(qy+1) + y$, *oder* $x - p = y(1 + (p - x)q)$, *oder*]

$$y = \frac{x - p}{1 - q(x - p)}$$

folgt. Nun ist aber $y = r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{y}}$, welches [*wie oben* 87.] $sy^2 - rsy - r = 0$ giebt. Substituirt man hierin den obigen Werth von y in x, so erhält man

89. $s(x-p)^2 - rs(x-p)(1-q(x-p)) - r(1-q(x-p))^2 = 0$,

welche Gleichung, entwickelt und nach x geordnet, vom zweiten Grade ist.

46.

Hieraus folgt, dass der obige Fall immer Statt findet, sobald unter den umgeformten Gleichungen

(§. 18.) zwei sind, welche die nämlichen Wurzeln haben; denn wäre z. B. die Wurzel z der Gleichung (48.) die nämliche wie die Wurzel x der Gleichung (43.), so wäre

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{x}},$$

welches der erste Fall des vorigen Paragraphs ist u. s. w. Setzt man also, dass in einem periodischen Bruche mehrere Zahlen in der nämlichen Ordnung wiederkehren, so darf man nur, um zu sehen, ob der Bruch wirklich bis ins Unendliche periodisch ist, untersuchen, ob die Wurzeln der beiden Gleichungen, die den nämlichen ganzzahligen approximativen Werth haben, völlig gleich sind, das heisst, ob die beiden Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel haben, welches man leicht findet, wenn man ihren gemeinschaftlichen Divisor sucht, der nothwendig alle gemeinschaftliche Wurzeln der beiden Gleichungen, wenn sie dergleichen haben, enthalten muss. Da nun, wie wir sahen, jeder periodische Kettenbruch auf die Wurzeln einer Gleichung des zweiten Grades gebracht werden kann, so folgt, dass der grösste gemeinschaftliche Divisor nothwendig vom zweiten Grade ist.

47.

Man setze also, dass sich unter den verschiedenen umgeformten Gleichungen zwei von gleichen Wurzeln finden, so ist der zugehörige Kettenbruch nothwendig bis ins Unendliche periodisch, so dass

Näherung durch continuirliche

man ihn blos durch Wiederholung der nemlichen Zahlen, so weit verfolgen kann, als man will.

Wir wollen nun sehen, wie man in diesem Falle auch die convergirenden Brüche des 23ten Paragraphs fortsetzen kann, ohne einen aus dem andern durch die gegebenen Formeln zu berechnen.

Zu diesem Ende wollen wir setzen, es sey allgemein

90. $x = \lambda' + \frac{1}{x'}$, $x' = \lambda'' + \frac{1}{x''}$, $x'' = \lambda''' + \frac{1}{x'''} \ldots\ldots$,

so dass, wenn x die gesuchte Wurzel ist, x', x'', x''' *etc.* die oben durch y, z, u *etc.* bezeichneten Wurzeln der umgeformten Gleichungen sind, so ist

$$91.\quad x = \lambda' + \cfrac{1}{\lambda'' + \cfrac{1}{\lambda''' \ldots}}$$

Setzen wir also, wie in (§. 23.),

$$92.\quad \left\{\begin{array}{ll} 1 = l & 0 = L \\ \lambda' = l' & 1 = L' \\ \lambda'' l' + l = l'' & \lambda'' L' = L'' \\ \lambda''' l'' + l' = l''' & \lambda''' L'' + L' = L''' \\ \lambda^{IV} l''' + l'' = l^{IV} & \lambda^{IV} L''' + L'' = L^{IV} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

so convergiren die Brüche

$$93.\quad \frac{l}{L},\ \frac{l'}{L'},\ \frac{l''}{L''},\ \frac{l'''}{L'''} \ldots\ldots$$

nach x.

Nun giebt die Gleichung $x = \lambda' + \frac{1}{x'}$,

$$xx' = x'\lambda' + 1 = x'l' + 1.$$

Brüche.

Setzt man in das zweite Glied dieser Gleichung den Werth $\lambda'' + \frac{1}{x''}$ von x' und multiplicirt mit x'', so erhält man [$xx'x'' = \left(\lambda'' + \frac{1}{x''}\right)x''l' + x''$, *oder* $xx'x'' = x''\lambda''l' + l' + x'' = x''(\lambda''l' + 1) + l'$, *oder, weil* $1 = l$ *ist* (92.)]

94. $xx'x'' = x''(\lambda''l' + l) + l' = l''x'' + l'$

[*weil* $\lambda''l' + l = l''$ *ist* (92.)]. Man findet auf dieselbe Weise, wenn man in den zweiten Theil dieser Gleichung $\lambda''' + \frac{1}{x'''}$ statt x'' setzt,

95. $xx'x''x''' = l'''x''' + l''$,

u. s. w.

Eben so giebt die Gleichung $x' = \lambda'' + \frac{1}{x''}$,

96. $x'x'' = \lambda''x'' + 1 = L''x'' + L'$,

und, wenn man in das zweite Glied $\lambda''' + \frac{1}{x'''}$ statt x'' setzt und mit x''' multiplicirt,

97. $x'x''x''' = (\lambda'''L'' + L')x''' + L'' = L'''x''' + L''$.

u. s. w.

Hieraus folgt, dass für jeden Kettenbruch, er sey periodisch oder nicht,

98. $$\begin{cases} xx'x''x''' \ldots x^{\varrho} = l^{\varrho}x^{\varrho} + l^{\varrho-1} \\ x'x''x''' \ldots x^{\varrho} = L^{\varrho}x^{\varrho} + L^{\varrho-1} \end{cases}$$

ist. Es ist zu bemerken, dass die kleinen etwas erhöheten Buchstaben, wie ϱ, nicht Exponenten, sondern blos Zeiger sind. [*Um dieses deutlicher anzuzeigen, wollen wir sie fortan rechts unten, statt*

Näherung durch continuirliche

rechts oben setzen, so dass z. B. die Gleichung (98.), *wie folgt, lautet:*

$$98. \begin{cases} x x_{,} x_{,,} x_{,,,} \dots x_{\varrho} = l_{\varrho} x_{\varrho} + l_{\varrho-1} \\ x_{,} x_{,,} x_{,,,} \dots x_{\varrho} = L_{\varrho} x_{\varrho} + L_{\varrho-1}]. \end{cases}$$

48.

Gesetzt nun, man fände, dass

$$99. \quad x_{\mu+\nu} = x_{\mu},$$

das heisst, dass die Wurzeln der $\mu+\nu$ten und der μten umgeformten Gleichungen die nämlichen sind, so wäre nothwendig auch

$$x_{\mu+\nu+1} = x_{\mu+1}$$
$$x_{\mu+\nu+2} = x_{\mu+2}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x_{\mu+2\nu} = x_{\mu}$$

etc. und allgemein

$$100. \quad x_{\mu+n\nu+\pi} = x_{\mu+\pi}$$

[*weil jede aus der vorigen auf die nämliche Weise gefunden wird*]. Also auch

$$\lambda_{\mu+\nu+1} = \lambda_{\mu+1}$$
$$\lambda_{\mu+\nu+2} = \lambda_{\mu+2}$$

und überhaupt

$$101. \quad \lambda_{\mu+n\nu+\pi} = \lambda_{\mu+\pi},$$

so dass

$$102.\quad x = \lambda_{,} + \cfrac{1}{\lambda_{,,} \ldots \cfrac{1}{\lambda_{\mu} + \cfrac{1}{\lambda_{\mu+1} + \cfrac{1}{\lambda_{\mu+2} \ldots + \cfrac{1}{\lambda_{\mu+\nu} + \cfrac{1}{\lambda_{\mu+1} + \ldots}}}}}}$$

[*wo die periodische Wiederkehr der Nenner angedeutet ist.*]

Setzt man nun im Allgemeinen

$$103.\quad \mu + n\nu + \pi = \varrho,$$

so gehen die beiden Gleichungen (98.) [*für den gegenwärtigen Fall eines periodischen Bruchs*], wie leicht zu sehen, in

$$104.\quad \begin{cases} x x_{,} x_{,,} \ldots x_{\mu} \times x_{\mu+1} x_{\mu+2} \ldots x_{\mu+\pi} \times (x_{\mu+1} x_{\mu+2} x_{\mu+\nu})^{n} \\ \qquad = l_{\varrho} x_{\mu+\pi} + l_{\varrho+1} \text{ und} \\ x_{,} x_{,,} x_{,,,} \ldots x_{\mu} \times x_{\mu+1} x_{\mu+2} \ldots x_{\mu+\pi} \times (x_{\mu+1} x_{\mu+2} x_{\mu+\nu})^{n} \\ \qquad = L_{\varrho} x_{\mu+\pi} + L_{\varrho-1} \end{cases}$$

über [*weil* $x_{\varrho} = x_{\mu+n\nu+\pi}$ (103.) $= x_{\mu+\pi}$ (100.)].

Setzt man in die nämliche Gleichung (98.) μ statt ϱ, so erhält man

$$105.\quad \begin{cases} x x_{,} x_{,,} \ldots x_{\mu} = l_{\mu} x_{\mu} + l_{\mu-1} \\ x_{,} x_{,,} \ldots x_{\mu} = L_{\mu} x_{\mu} + L_{\mu-1}. \end{cases}$$

Da nun ferner

Näherung durch continuirliche

$$x_\mu = \lambda_{\mu+1} + \frac{1}{x_{\mu+1}},\ x_{\mu+1} = \lambda_{\mu+2} + \frac{1}{x_{\mu+2}}\ etc. \quad (90.)$$

ist, so erhält man, wenn man [*wie* 92.]

$$106. \begin{cases} 1 = h & 0 = H \\ \lambda_{\mu+1} = h_1 & 1 = H_1 \\ \lambda_{\mu+2} h_1 + h = h_2 & \lambda_{\mu+2} H_1 = H_2 \\ \lambda_{\mu+3} h_2 + h_1 = h_3 & \lambda_{\mu+3} H_2 + H_1 = H_3 \\ \lambda_{\mu+4} h_3 + h_2 = h_4 & \lambda_{\mu+4} H_3 + H_2 = H_4 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

setzt, im Allgemeinen,

$$107. \begin{cases} x_\mu x_{\mu+1} x_{\mu+2} \dots x_{\mu+\sigma} = h_\sigma x_{\mu+\sigma} + h_{\sigma-1} \\ x_{\mu+1} x_{\mu+2} \dots x_{\mu+\sigma} = H_\sigma x_{\mu+\sigma} + H_{\sigma-1} \end{cases}$$

[*auf dieselbe Weise wie in* §. 47.]. Es ist also auch

$$108.\quad x_{\mu+1} x_{\mu+2} \dots x_{\mu+\pi} = H_\pi x_{\mu+\pi} + H_{\pi-1},$$

und, weil $x_{\mu+\nu} = x_\mu$ (99.), aus (107.)

$$109.\quad x_{\mu+1} x_{\mu+2} \dots x_{\mu+\nu} = H_\nu x_\mu + H_{\nu-1}.$$

Substituirt man die Gleichungen (98. 108 und 109.) in (104.), so erhält man

$$110. \begin{cases} (l_\mu x_\mu + l_{\mu-1})(H_\pi x_{\mu+\pi} + H_{\pi-1})(H_\nu x_\mu + H_{\nu-1})^n \\ \qquad = l_\varrho x_{\mu+\pi} + l_{\varrho-1} \\ (L_\mu x_\mu + L_{\mu-1})(H_\pi x_{\mu+\pi} + H_{\pi-1})(H_\nu x_\mu + H_{\nu-1})^n \\ \qquad = L_\varrho x_{\mu+\pi} + L_{\varrho-1}. \end{cases}$$

Brüche.

49.

Nun geben die beiden Gleichungen (107.), wenn man eine durch die andere dividirt,

$$111.\quad x_\mu = \frac{h_\sigma x_{\mu+\sigma} + h_{\sigma-1}}{H_\sigma x_{\mu+\sigma} + H_{\sigma-1}},$$

woraus [*wenn man den Nenner wegschafft*]

$$112.\quad x_{\mu+\sigma} = \frac{H_{\sigma-1} x_\mu - h_{\sigma-1}}{h_\sigma - H_\sigma x_\mu}$$

folgt.

Setzt man [*das willkürliche*] σ gleich π, so erhält man aus (112.)

$$113.\quad x_{\mu+\pi} = \frac{H_{\pi-1} x_\mu - h_{\pi-1}}{h_\pi - H_\pi x_\mu}$$

und hieraus $\Big[H_\pi x_{\mu+\pi} + H_{\pi-1} = H_\pi \dfrac{H_{\pi-1} x_\mu - h_{\pi-1}}{h_\pi - H_\pi x_\mu}$ $+ H_{\pi-1} =$

$$\frac{1 \mp H_\pi H_{\pi-1} x_\mu - H_\pi h_{\pi-1} + h_\pi H_{\pi-1} - H_{\pi-1} H_\pi x_\mu}{h_\pi - H_\pi x_\mu},$$

also$\Big]$

$$114.\quad H_\pi x_{\mu+\pi} + H_{\pi-1} = \frac{h_\pi H_{\pi-1} - H_\pi h_{\pi-1}}{h_\pi - H_\pi x_\mu}.$$

Nun ist aber, wie aus der Natur der Grössen h, h_1, h_2 und H, H_1, H_2 (106.) leicht zu sehen,

$$H_1 h - h_1 H = 1$$
$$H_2 h_1 - h_2 H_1 = -1$$
$$H_3 h_2 - h_3 H_2 = 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

Näherung durch continuirliche

und folglich allgemein

115. $h_\pi H_{\pi-1} - H_\pi h_{\pi-1} = \pm 1,$

wo das obere Zeichen gilt, wenn π eine gerade Zahl ist, das untere, wenn π ungerade ist. [*Es ist z. B. nach* (106.),

$$H_1 h - h_1 H = 1 - 0 = 1,$$
$$H_2 h_1 - h_2 H_1 = \lambda_{\mu+2} H_1 \lambda_{\mu+1} - (\lambda_{\mu+2} h_1 + h) = -h$$
$$= -1$$

u. s. w. Es ist also in (114.)

$$H_\pi x_{\mu+\pi} + H_{\pi-1} = \frac{\pm 1}{h_\pi - H_\pi x_\mu}].$$

Substituirt man nun (115. und 113.) in (110.), so erhält man

$$\Big[(l_\mu x_\mu + l_{\mu-1}) \times \left(\frac{\pm 1}{h_\pi - H_\pi x_\mu}\right)(H_\nu x_\mu + H_{\nu-1})^n =$$
$$l_\varrho \left(\frac{H_{\pi-1} x_\mu - h_{\pi-1}}{h_\pi - H_\pi x_\mu}\right) + l_{\varrho-1}, \textit{ oder}\Big]$$

116.
$$\left\{\begin{array}{l} \pm(l_\mu x_\mu + l_{\mu-1})(H_\nu x_\mu + H_{\nu-1})^n = \\ (l_\varrho H_{\pi-1} - l_{\varrho-1} H_\pi) x_\mu + l_{\varrho-1} h_\pi - l_\varrho h_{\pi-1} \\ \text{[\textit{Eben so}]} \\ \pm(L_\mu x_\mu + L_{\mu-1})(H_\nu x_\mu + H_{\nu-1})^n = \\ (L_\varrho H_{\pi-1} - L_{\varrho-1} H_\pi) x_\mu + L_{\varrho-1} h_\pi - L_\varrho h_{\pi-1}. \end{array}\right.$$

Das Zeichen $\pm$ richtet sich, wie oben bemerkt, nach π.

Setzt man nun in (111.) [*das willkürliche*] $\sigma = \nu$, so erhält man, weil nach der Voraussetzung $x_{\mu+\nu} = x_\mu$ (99.) ist,

Brüche.

$$117.\quad x_\mu = \frac{h_\nu x_\mu + h_{\nu-1}}{H_\nu x_\mu + H_{\nu-1}}.$$

Dieses giebt folgende Gleichung mit x_μ

$$118.\quad x^2_\mu H_\nu - (h_\nu - H_{\nu-1}) x_\mu - h_{\nu-1} = 0,$$

aus welcher

$$119.\quad x_\mu = \frac{h_\nu - H_{\nu-1} \pm \sqrt{((h_\nu - H_{\nu-1})^2 + 4h_{\nu-1} H_\nu)}}{2H_\nu}$$

folgt.

Man setze, der Kürze wegen,

$$120.\quad \frac{h_\nu - H_{\nu-1}}{2H_\nu} = P \text{ und } P^2 + \frac{h_{\nu-1}}{H_\nu} = Q,$$

so erhält man

$$121.\quad x_\mu = P \pm \sqrt{Q},$$

und, wenn man dieses in (116.) substituirt,

$$122.\quad \begin{cases} \pm(l_\mu P + l_{\mu-1} \pm \sqrt{Q})(H_\nu P + H_{\nu-1} \pm H_\nu \sqrt{Q})^n \\ = (l_\varrho H_{\pi-1} - l_{\varrho-1} H_\pi)(P \pm \sqrt{Q}) + l_{\varrho-1} h_\pi - l_\varrho h_{\pi-1} \\ \text{und} \\ \pm(L_\mu P + L_{\mu-1} \pm L_\mu \sqrt{Q})(H_\nu P + H_{\nu-1} \pm H_\nu \sqrt{Q})^n \\ = (L_\varrho H_{\pi-1} - L_{\varrho-1} H_\pi)(P \pm \sqrt{Q}) + L_{\varrho-1} h_\pi - L_\varrho h_{\pi-1}, \end{cases}$$

welches, wegen des zweifachen Zeichens vor $\sqrt{Q}$, vier Gleichungen giebt, aus welchen sich l_ϱ, $l_{\varrho-1}$, L_ϱ, $L_{\varrho-1}$ finden lassen.

Näherung durch continuirliche

50.

Man setze nämlich, der Kürze wegen,

$$123.\quad \begin{cases} l_\mu P + l_{\mu-1} = f_\mu \\ L_\mu P + L_{\mu-1} = F_\mu \\ H_\nu P + H_{\nu-1} = K_\nu, \end{cases}$$

so sind die vier Gleichungen folgende:

$$124.\quad l_\varrho H_{\pi-1} - l_{\varrho-1} H_\pi = \frac{(f_\mu + l_\mu \sqrt{Q})(K_\nu + H_\nu \sqrt{Q})^n - (f_\mu - l_\mu \sqrt{Q})(K_\nu - H_\nu \sqrt{Q})^n}{2\sqrt{Q}}.$$

$$125.\quad l_{\varrho-1} h_\pi - l_\varrho h_{\pi-1} = \frac{\pm(P + \sqrt{Q})(f_\mu - l_\mu \sqrt{Q})(K_\nu - H_\nu \sqrt{Q})^n}{2\sqrt{Q}} \quad \frac{\pm(P - \sqrt{Q})(f_\mu - l_\mu \sqrt{Q})(K_\nu + H_\nu \sqrt{Q})^n}{2\sqrt{Q}}.$$

$$126.\quad L_\varrho H_{\pi-1} - L_{\varrho-1} H_\pi = \frac{(F_\mu + L_\mu \sqrt{Q})(K_\nu + H_\nu \sqrt{Q})^n - (F_\mu - L_\mu \sqrt{Q})(K_\nu - H_\nu \sqrt{Q})^n}{2\sqrt{Q}}.$$

$$127.\quad L_{\varrho-1} h_\pi - L_\varrho h_{\pi-1} = \frac{\pm(P + \sqrt{Q})(F_\mu - L_\mu \sqrt{Q})(K_\nu - H_\nu \sqrt{Q})^n}{2\sqrt{Q}} \quad \frac{\pm(P - \sqrt{Q})(F_\mu - L_\mu \sqrt{Q})(K_\nu - H_\nu \sqrt{Q})^n}{2\sqrt{Q}}.$$

[*Man findet nämlich die Gleichung* (124.), *wenn man in* (122.), *in der ersten Gleichung, erst* $\sqrt{Q}$ *mit* + *und dann mit* — *nimmt, eine Gleichung*

Brüche.

von der andern abzieht und den Rest mit $2\sqrt{Q}$ *dividirt. Die Gleichung* (125.) *findet man, wenn man in* (122.), *in der ersten Gleichung, erst* $\sqrt{Q}$ *mit — nimmt, das Ganze mit* $P+\sqrt{Q}$ *multiplicirt, darauf* $\sqrt{Q}$ *mit + nimmt, das Ganze mit* $P-\sqrt{Q}$ *multiplicirt, die beiden Producte von einander abzieht und den Rest durch* $2\sqrt{Q}$ *dividirt. Die Gleichungen* (126.) *und* (127.) *findet man aus* (124.) *und* (125.), *wenn man* l *mit* L *und* f *mit* F *verwechselt.*]

Multiplicirt man nun die erste dieser vier Gleichungen mit h_π, die zweite mit H_π, desgleichen die dritte mit h_π und die vierte mit H_π, und addirt das erste und zweite, und das dritte und vierte Product, so erhält man, wenn man noch, der Kürze wegen,

$$128.\quad -H_\pi P + h_\pi = G_\pi$$

setzt, weil $h_\pi H_{\pi-1} - H_\pi h_{\pi-1} = \pm 1$ ist (115.),

$$129.\quad \begin{cases} l_\varrho = \dfrac{(f_\mu + l_\mu\sqrt{Q})(G_\pi + H_\pi\sqrt{Q})(K_\nu + H_\nu\sqrt{Q})^n}{2\sqrt{Q}} \\ \quad \dfrac{-(f_\mu - l_\mu\sqrt{Q})(G_\pi - H_\pi\sqrt{Q})(K_\nu - H_\nu\sqrt{Q})^n}{2\sqrt{Q}} \\ L_\varrho = \dfrac{(F_\mu + L_\mu\sqrt{Q})(G_\pi + H_\pi\sqrt{Q})(K_\nu + H_\nu\sqrt{Q})^n}{2\sqrt{Q}} \\ \quad \dfrac{(-(F_\mu - L_\mu\sqrt{Q})(G_\pi - H_\pi\sqrt{Q})(K_\nu - H_\nu\sqrt{Q})^n)}{2\sqrt{Q}}, \end{cases}$$

wo nun

$$\varrho = \mu + n\nu + \pi$$

ist (103.).

Näherung durch continuirliche

Hat man also mit Hülfe der Grössen λ_1, λ_2, λ_3.... bis $\lambda_{\mu+\nu}$ aus den Gleichungen (92. und 106.) die Grössen l, l_1, l_2.... und L, L_1, L_2.... bis zu l_μ und L_μ, und die Grössen h, h_1, h_2.... und H, H_1, H_2.... bis zu h_ν und H_ν berechnet, so lassen sich, vermittelst der Gleichung (129.), die Grössen l_ϱ und L_ϱ, das heisst, die Glieder des Bruches $\frac{l_\varrho}{L_\varrho}$ [*in der Reihe der convergenten Brüche* (93.)] für jeden beliebigen Exponenten ϱ finden. Denn man darf nur μ von ϱ abziehen und die Differenz durch ν dividiren, so erhält man den Exponenten n in den Ausdrücken (129.); der Rest ist die Zahl π, welche also immer kleiner als ν ist [*weil* $\varrho = \mu + n\nu + \pi$ (103.) *und folglich* $\frac{\varrho-\mu}{\nu} + \frac{\pi}{\nu} = n$].

Obgleich die Ausdrücke (129.) noch die Wurzel-Grösse $\sqrt{Q}$ enthalten, so fällt dieselbe dennoch, wenn man die Ausdrücke entwickelt, wie leicht zu sehen, weg, so dass l_ϱ und L_ϱ immer rationale ganze Zahlen sind. [*Die Grösse* l_ϱ *z. B. giebt eine Gleichung von der Form*

$$2\sqrt{Q}\,l_\varrho = (a+\alpha)(b+\beta)(c+\gamma)^n - (a-\alpha)(b-\beta)(c-\gamma)^n,$$

wo nur die Grössen α, β, γ *die Wurzel-Grösse* $\sqrt{Q}$ *enthalten. Dieses giebt, wenn man entwickelt,*

$$2\sqrt{Q}\,l_\varrho = (ab+a\beta+\alpha b+\alpha\beta)(c^n+n_1c^{n-1}\gamma+n_2c^{n-2}\gamma^2\ldots)$$
$$-(ab-a\beta-\alpha b+\alpha\beta)(c^n-n_1c^{n-1}\gamma+n_2c^{n-2}\gamma^2\ldots),$$

oder

$2\sqrt{Q}$

Brüche.

$$2\sqrt{Q}\,l_\varrho = 2ab(n_1 c^{n-1}\gamma + n_3 c^{n-3}\gamma^3 \ldots.)$$
$$+ 2a\beta(c^n + n_2 c^{n-2}\gamma^2 \ldots.)$$
$$+ 2\alpha b(c^n + n_2 c^{n-2}\gamma^2 \ldots.)$$
$$+ 2\alpha\beta(n_1 c^{n-1}\gamma + n_3 c^{n-3}\gamma^3 \ldots.),$$

wo die Grössen α, β, γ, welche $\sqrt{Q}$ in einer Abmessung enthalten, immer in einer ungeraden Zahl von Abmessungen vorkommen, so dass also, wenn man auf beiden Seiten mit $\sqrt{Q}$ dividirt, überall eine gerade Zahl von Abmessungen der Wurzel-Grösse übrig bleibt und folglich die Wurzel-Grösse selbst wegfällt. Eben so verhält es sich mit der Grösse L_ϱ.]

51.

Wollte man übrigens im Allgemeinen die Gleichung zweiter Ordnung haben, welche die Wurzel x aus der gegebenen Gleichung giebt, so darf man nur, weil $x_{\mu+\nu} = x_\mu$ ist, wie (§. 48.) (99.), erwägen, dass die Gleichungen (98.), wenn man sie eine durch die andere dividirt, im Allgemeinen,

$$130.\quad x = \frac{l_\varrho x_\varrho + l_{\varrho-1}}{L_\varrho x_\varrho + L_{\varrho-1}}$$

geben, woraus, wenn man $\varrho = \mu$ setzt,

$$131.\quad x_\mu = \frac{L_{\mu-1}x - l_{\mu-1}}{l_\mu - L_\mu x}$$

folgt. Substituirt man daher dieses in die Gleichung (118.), so erhält man

Näherung durch continuirliche

$$H_\nu(L_{\mu-1}x-l_{\mu-1})^2-(h_\nu-H_{\nu-1})(L_{\mu-1}x-l_{\mu-1})(l_\mu-L_\mu x)$$
$$-h_{\nu-1}(l_\mu-L_\mu x)^2=0,$$

oder

$$(H_\nu(L_{\mu-1})^2+(h_\nu-H_{\nu-1})L_{\mu-1}L_\mu-h_{\nu-1}(L_\mu)^2)x^2$$
$$-(2H_\nu L_{\mu-1}l_{\mu-1}+(h_\nu-H_{\nu-1})(L_{\mu-1}l_\mu+l_{\mu-1}L_\mu)-2h_{\nu-1}l_\mu L_\mu)x$$
$$+H_\nu(l_{\mu-1})^2+(h_\nu-H_{\nu-1})l_{\mu-1}l_\mu-h_{\nu-1}(l_\mu)^2=0,$$

welche Gleichung also nothwendig ein Divisor der gegebenen Gleichung ist.

Zweite Abtheilung.

Einfache Methode, die Wurzeln einer Gleichung zweiter Ordnung durch Kettenbrüche auszudrücken.

52.

Wir wollen die allgemeine Gleichung zweiter Ordnung

$$132.\quad a_1x^2-2cx-a=0$$

nehmen, wo a, a_1 und c ganze Zahlen sind, und zwar unter der Bedingung, dass

$$133.\quad c^2+aa_1>0$$

ist, damit die Gleichung reelle Wurzeln habe. Löset man diese Gleichung auf, so erhält man

$$134.\quad x=\frac{c+\sqrt{(c^2+aa_1)}}{a_1},$$

wo die Wurzel-Grösse sowohl positiv als negativ

Brüche.

genommen werden kann. Man setze, die gesuchte Wurzel sey positiv, λ_1 sey diejenige ganze Zahl, welche zunächst kleiner ist als x, und es sey

$$135.\quad x = \lambda_1 + \frac{1}{x_1}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in die gegebene Gleichung, so erhält man [$a_1\left(\lambda_1^2 + \frac{2\lambda_1}{x_1} + \frac{1}{x_1^2}\right) - 2c\lambda_1 - \frac{2c}{x_1} - a = 0$. *Dieses also ist*] eine umgeformte Gleichung, in welcher die unbekannte Grösse x_1 ist. Multiplicirt man nach der Substitution die Gleichung mit x_1^2, verändert das Zeichen und setzt, der Kürze wegen,

$$136.\quad \begin{cases} \lambda_1 a_1 - c = c_1 \text{ und} \\ a + 2c\lambda_1 - a_1\lambda_1^2 = a_2, \end{cases}$$

so geht die verwandelte Gleichung in

$$a_2 x_1^2 - 2c_1 x_1 - a_1 = 0$$

über, welches

$$137.\quad x_1 = \frac{c_1 + \sqrt{(c_1^2 + a_1 a_2)}}{a_2}$$

giebt [*welcher Ausdruck dem* (134.) *ganz ähnlich ist*]. Man kann also nun von Neuem diejenige ganze Zahl λ_2 suchen, welche zunächst kleiner ist, als x_1, hierauf

$$x_1 = \lambda_2 + \frac{1}{x_2}$$

setzen und die obige Rechnung wiederholen.

Nun bemerke man, dass die Grösse $c_1^2 + a_1 a_2$ unter dem Wurzelzeichen, in dem Ausdrucke von x_1 (137.), wenn man die Werthe von c_1 und a_2 aus

Näherung durch continuirliche

(136.) substituirt, und weglässt was sich aufhebt, in $c^2 + aa_1$ übergeht, was mit der Grösse unter dem Wurzelzeichen in x selbst (134.) ganz übereinkommt. [*Nämlich, wenn man in* $c_1^2 + a_1 a_2$ *die Werthe von* c_1 *und* a_2 (136.) *setzt, so erhält man*

$$\lambda_1^2 a_1^2 - 2\lambda_1 a_1 c + c^2 + a_1 a + 2ca_1\lambda_1 - a_1^2\lambda_1^2,$$

oder $c^2 + a_1 a$.]

Hieraus folgt, dass die Wurzel-Grösse in den Ausdrücken von x; x_1, x_2.... immer die nämliche bleibt.

Setzt man also, der Kürze wegen,

$$138. \quad c^2 + aa_1 = B$$

und

139.
$$\begin{cases} a_2 = a + 2c\lambda_1 - a_1\lambda_1^2 \text{ (wie 136.)} \\ a_3 = a_1 + 2c_1\lambda_2 - a_2\lambda_2^2 \\ a_4 = a_2 + 2c_2\lambda_3 - a_3\lambda_3^2 \\ etc., \\ \lambda_1 < \frac{c+\sqrt{B}}{a_1},\ c_1 = \lambda_1 a_1 - c \text{ (wie 136.)} \\ \lambda_2 < \frac{c_1+\sqrt{B}}{a_2},\ c_2 = \lambda_2 a_2 - c_1 \\ \lambda_3 < \frac{c_2+\sqrt{B}}{a_3},\ c_3 = \lambda_3 a_3 - c_2 \\ \lambda^4 < \frac{c_3+\sqrt{B}}{a_4},\ c_4 = \lambda_4 a_4 - c_3 \\ etc., \end{cases}$$

(wo das Zeichen $<$ anzeigt, dass man die nächst kleinere ganze Zahl nehmen soll), so erhält man:

Brüche.

$$140.\quad \begin{cases} x = \dfrac{c + \sqrt{B}}{a_1} = \lambda_1 + \dfrac{1}{x_1} \\ x_1 = \dfrac{c_1 + \sqrt{B}}{a_2} = \lambda_2 + \dfrac{1}{x_2} \\ x_2 = \dfrac{c_2 + \sqrt{B}}{a_3} = \lambda_3 + \dfrac{1}{x_3}\ etc., \end{cases}$$

woraus

$$141.\quad x = \lambda_1 + \cfrac{1}{\lambda_2 + \cfrac{1}{\lambda_3 + \ldots}}$$

folgt. Der Wurzel-Grösse $\sqrt{B}$ muss man immer eben das Zeichen vorsetzen, wie in dem Werthe der gesuchten Wurzel x.

Auch ist noch zu bemerken, dass, weil

$$c_1^2 + a_1 a_2 = c^2 + a a_1 = B$$

ist,

$$a_2 = \frac{B - c_1^2}{a_1},\ a_3 = \frac{B - c_2^2}{a_2},\ a_4 = \frac{B - c_3^2}{a_3}\ etc.$$

ist. Man kann sich also, wenn man es, um a_2, a_3 *etc.* zu finden, bequemer erachtet, auch dieser Ausdrücke statt der obigen (139.) bedienen.

53.

Nun behaupte ich, dass der Kettenbruch, welcher x ausdrückt (141.), nothwendig ein periodischer Bruch ist.

Um dieses zu beweisen, wollen wir erst allgemein nachweisen, dass man bei jeder gegebenen Gleichung zweiter Ordnung nothwendig auf umgeformte Gleichungen kommen muss, deren erstes und letztes Glied entgegengesetzte Zeichen haben. Wir fanden

Näherung durch continuirliche

in der That in (§. 19.), dass man nothwendig auf eine umgeformte Gleichung kommen muss, die nur eine einzige Wurzel hat, welche grösser ist als Eins. Jede folgende umgeformte Gleichung wird ebenfalls nur eine einzige Wurzel haben, die grösser ist als Eins. Es sey also

$$142.\quad au^{m} + bu^{m-1} + cu^{m-2} \ldots + k = 0$$

eine jener umgeformten Gleichungen, welche nur eine Wurzel haben, die grösser ist als Eins, und s die ganze Zahl, welche u am nächsten kommt, so kann man, um die nächste umgeformte Gleichung zu finden,

$$u = s + \frac{1}{w}$$

setzen. Substituirt man dieses, so erhält man, wie leicht zu sehen, eine umgeformte Gleichung, in welcher das erste Glied des ersten Theils

$$143.\quad (as^{m} + bs^{m-1} + cs^{m-2} \ldots + k)w^{m},$$

und das letzte Glied des ersten Theils a ist. Da nun aber der wirkliche Werth von u in der obigen transformirten Gleichung zwischen $u = s$ und $u = \infty$ fällt, in welchem Zwischenraum es nach der Voraussetzung keinen andern Werth von u geben soll, [*weil die Gleichung* (142.) *nur einen Werth von u haben soll, der grösser ist als* 1,] so folgt, dass, wenn man in die Gleichung (142.) $u = s$ und $u = \infty$ setzt, die Resultate nothwendig entgegengesetzte Zeichen haben müssen; denn es giebt in diesem Falle nur einen unter den Factoren der Gleichung, welcher

Brüche.

das Zeichen bei dem Uebergange von einem Werthe von u zum andern verändern kann. Nun bleibt [*in* (142.)] für $u = \infty$ nur das Glied au^m allein übrig, weil die übrigen Glieder gegen dieses verschwinden, und dieses Glied hat das nämliche Zeichen wie a [*weil u positiv ist*]. Also muss $u = s$ nothwendig ein Resultat geben, dessen Zeichen dem von a entgegengesetzt ist. Dieses Resultat ist

$$as^m + bs^{m-1} + cs^{m-2} \dots + k.$$

Da nun diese Grösse zugleich der Coefficient des ersten Gliedes der transformirten Gleichung in w ist (143.), deren letztes Glied a war, so folgt, dass die beiden äussersten Glieder dieser transformirten Gleichung nothwendig entgegengesetzte Zeichen haben müssen.

Auf dieselbe Weise lässt sich zeigen, dass das Nämliche um so mehr in allen folgenden transformirten Gleichungen der Fall ist.

Da nun die gegebene Gleichung

$$a_1 x^2 - 2cx - a = 0 \quad (132.)$$

die transformirten Gleichungen

$$a_2 x_1{}^2 - 2c_1 x_1 - a_1 = 0$$
$$a_3 x_2{}^2 - 2c_2 x_2 - a_2 = 0$$

etc. hat (§. 52.), so folgt, dem was vorhin bewiesen zu Folge, dass man nothwendig zu transformirten Gleichungen wie

$$144. \left\{ \begin{array}{l} a_{\gamma+1} x_\gamma{}^2 - 2c_\gamma x_\gamma - a_\gamma = 0, \\ a_{\gamma+2} x_{\gamma+1}{}^2 - 2c_{\gamma+1} x_{\gamma+1} - a_{\gamma+1} = 0 \end{array} \right.$$

Näherung durch continuirliche

etc. gelangen muss, deren erste und letzte Glieder entgegengesetzte Zeichen haben, so dass a_γ, $a_{\gamma+1}$, $a_{\gamma+2}$ alle einerlei Zeichen haben.

Nun ist aber

145. $B = c_\gamma^2 + a_\gamma a_{\gamma+1} = c_{\gamma+1}^2 + a_{\gamma+1} a_{\gamma+2}$ *etc.*

(138.), worin die Producte $a_\gamma a_{\gamma+1}$, $a_{\gamma+1} a_{\gamma+2}$ *etc.*, weil a_γ, $a_{\gamma+1}$, $a_{\gamma+2}$ *etc.*, einerlei Zeichen haben, nothwendig positiv sind. Hieraus folgt:

Erstlich, dass

$$c_\gamma^2 < B,\ c_{\gamma+1}^2 < B \text{ etc.}$$

ist [*weil* c_γ^2, $c_{\gamma+1}^2$, *als Quadrate, ebenfalls immer positiv sind*], und dass folglich, wenn man vom Zeichen abstrahirt,

$$c_\gamma < \sqrt{B},\ c_{\gamma+1} < \sqrt{B} \text{ etc.}$$

ist, ins Unendliche.

Zweitens folgt, dass, weil a, a_1, a_2 *etc.* sämmtlich ganze Zahlen sind,

$$a_\gamma < B,\ a_{\gamma+1} < B \text{ etc.}$$

ist. [*Denn nur, wenn z. B.* a_γ *ein echter Bruch wäre, könnte in* (145.) *der andere Factor* $a_{\gamma+1}$ *grösser als B selbst seyn.*]

Da nun aber B eine bestimmte Grösse ist, so ist klar, dass nur eine gewisse Menge von ganzen Zahlen existire, die kleiner als B und $\sqrt{B}$ sind, so dass a_γ, $a_{\gamma+1}$, $a_{\gamma+2}$ c_γ, $c_{\gamma+1}$, $c_{\gamma+2}$ nur eine gewisse Zahl verschiedener Werthe haben können, und

dass also dieselben Zahlen, wenn man die Reihen der Grössen a_γ, $a_{\gamma+1}$, $a_{\gamma+2}\ldots$, c_γ, $c_{\gamma+1}$, $c_{\gamma+2}\ldots$ ins Unendliche fortsetzt, so wie einerlei Zusammensetzungen correspondirender Glieder der beiden Reihen, unendliche male wiederkehren müssen, so dass also zum Beispiel

$$a_{\gamma+\delta+\nu} = a_{\gamma+\delta} \text{ und } c_{\gamma+\delta+\nu} = c_{\gamma+\delta},$$

oder, wenn man

$$\gamma + \delta = \mu$$

setzt,

$$146. \quad a_{\mu+\nu} = a_\mu \text{ und } c_{\mu+\nu} = c_\mu,$$

also auch, wegen

$$B = c_\mu^2 + a_\mu a_{\mu+1} = c_{\mu+\nu}^2 + a_{\mu+\nu} a_{\mu+\nu+1} \quad (145.),$$

$$147. \quad a_{\mu+\nu+1} = a_{\mu+1}$$

ist. Nun aber ist

$$x_\mu = \frac{c_\mu + \sqrt{B}}{a_{\mu+1}} \text{ und } x_{\mu+\nu} = \frac{c_{\mu+\nu} + \sqrt{B}}{a_{\mu+\nu+1}} \quad (140.),$$

also ist

$$148. \quad x_{\mu+\nu} = x_\mu.$$

Mithin ist der Bruch [*welcher x ausdrückt*] nothwendig ein periodischer Kettenbruch.

54.

In der That folgt aus den Gleichungen (139.), dass, sobald

$$a_{\mu+\nu} = a_\mu \text{ und } c_{\mu+\nu} = c_\mu$$

ist, auch

$$149. \quad a_{\mu+\nu+1} = a_{\mu+1},\ \lambda_{\mu+\nu+1} = \lambda_{\mu+1},\ c_{\mu+\nu+1} = c_{\mu+1}$$

Näherung durch continuirliche

u. s. w. seyn muss, so dass allgemein die Glieder der drei Reihen,

$$a,\ a_1,\ a_2 \ldots\ldots$$
$$c,\ c_1,\ c_2 \ldots\ldots$$
$$\lambda,\ \lambda_1,\ \lambda_2 \ldots\ldots,$$

welche $\mu + n\nu + \pi$ zum Zeiger haben, wo n irgend eine ganze Zahl bedeutet, mit den vorhergehenden Gliedern übereinkommen, deren Zeiger $\mu + \pi$ ist.

Jede dieser drei Reihen ist also nothwendig von den Gliedern a_μ, c_μ und $\lambda_{\mu+1}$ ab, eine periodische. Die Perioden haben ν Glieder, nach welchen bis ins Unendliche die nämlichen Glieder immer wiederkehren.

55.

Wir fanden, dass man, wenn man mit der Reihe der Grössen a, a_1, $a_2 \ldots\ldots$ fortfährt, nothwendig auf Glieder von gleichen Zeichen kommen muss, und dass folglich die Reihe zuletzt nothwendig zu einer periodischen werden muss. Ich behaupte nun, dass, sobald man zwei auf einander folgende Glieder der Reihe, wie a_γ, $a_{\gamma+1}$, von gleichen Zeichen findet, nothwendig eins dieser Glieder schon eins von den periodischen Gliedern seyn muss, welches in jeder Periode wiederkehrt.

Wenn nämlich a_γ und $a_{\gamma+1}$ gleiche Zeichen haben, so ist klar, dass die transformirte Gleichung

$$a_{\gamma+1} x_\gamma^2 - 2c_\gamma x_\gamma - a_\gamma = 0$$

nothwendig eine positive und eine negative Wurzel

haben muss, so dass sie nur eine Wurzel haben kann, die grösser ist als Eins. In allen folgenden transformirten Gleichungen haben daher alsdann, ebenfalls nach (§. 53.), die äussersten Glieder entgegengesetzte Zeichen. Also haben nothwendig alle die Zahlen a_γ, $a_{\gamma+1}$, $a_{\gamma+2}$ *etc.* einerlei Zeichen, so dass jede derselben kleiner als B, und jede von den Zahlen c_γ, $c_{\gamma+1}$, $c_{\gamma+2}$ *etc.* kleiner als $\sqrt{B}$ ist (§. 53.).

56.

Da nun

$$B = c_\gamma^2 + a_\gamma a_{\gamma+1} \quad [(138.)],$$

so müssen entweder die Zahlen a_γ und $a_{\gamma+1}$ beide kleiner als $\sqrt{B}$ seyn, oder wenn eine von ihnen grösser ist, so muss wenigstens die andere kleiner seyn, [*weil* c_γ^2 *als Quadrat immer positiv und daher nothwendig* $a_\gamma a_{\gamma+1} < B$ *ist*], so dass also wenigstens eine von diesen beiden Zahlen immer kleiner als $\sqrt{B}$ ist.

Angenommen, die kleinere Zahl sey a_γ, so lässt sich zeigen, dass die Zahlen a_γ, $a_{\gamma+1}$, $a_{\gamma+2}$.... alle nothwendig mit der Wurzel-Grösse $\sqrt{B}$ einerlei Zeichen haben. Da nämlich nach der Natur des Kettenbruchs alle die Wurzeln x^1, x^2, x^3.... der transformirten Gleichung nothwendig grösser als Eins seyn müssen, [*weil* $\frac{1}{x^1}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$.... *nach der Voraussetzung echte Brüche sind* (§. 52.),] so ist auch

Näherung durch continuirliche

$$x_\gamma > 1,\ x_{\gamma+1} > 1 \ldots.$$

u. s. w., also

$$150.\quad \frac{c_\gamma + \sqrt{B}}{a_{\gamma+1}} > 1,\ \frac{c_{\gamma+1} + \sqrt{B}}{a_{\gamma+2}} > 1 \text{ etc. } [140.]$$

Da nun

$$B = c_\gamma^{\,2} + a_\gamma a_{\gamma+1} = c_{\gamma+1}^{\,2} + a_{\gamma+1} a_{\gamma+2} \text{ etc. } [138.],$$

so ist [*z. B.* $B - c_\gamma^{\,2} = a_\gamma a_{\gamma+1}$, *oder*

$$(\sqrt{B} - c_\gamma)(\sqrt{B} + c_\gamma) = a_\gamma a_{\gamma+1}, \text{ also}]$$

$$151.\ \begin{cases} \dfrac{c_\gamma + \sqrt{B}}{a_{\gamma+1}} = \dfrac{a_\gamma}{\sqrt{B} - c_\gamma} \text{ [und eben so]} \\ \dfrac{c_{\gamma+1} + \sqrt{B}}{a_{\gamma+2}} = \dfrac{a_{\gamma+1}}{\sqrt{B} - c_{\gamma+1}} \end{cases}$$

u. s. w. also auch [*vermöge* (150.)]

$$152.\quad \frac{a_\gamma}{\sqrt{B} - c_\gamma} > 1,\ \frac{a_{\gamma+1}}{\sqrt{B} - c_{\gamma+1}} > 1 \text{ etc.}$$

Da nun aber c_γ, $c_{\gamma+1}$ *etc.* kleiner als $\sqrt{B}$ sind [(§. 55.)], so ist klar, dass, welche Zeichen auch c_γ, $c_{\gamma+1}$ *etc.* haben mögen, die Nenner $\sqrt{B} - c_\gamma$, $\sqrt{B} - c_{\gamma+1}$ immer von dem nämlichen Zeichen seyn müssen, wie $\sqrt{B}$; folglich müssen auch die Zähler a_γ, $a_{\gamma+1} \ldots.$ das nämliche Zeichen haben, wie $\sqrt{B}$ [*weil die Brüche* (152.) *grösser als Eins, das heisst, positiv sind.*]

Wir wollen nun, der Kürze wegen, $\sqrt{B}$ positiv annehmen, so dass also a_γ, $a_{\gamma+1}$ *etc.* ebenfalls po-

sitiv sind, so behaupte ich, dass alsdann c_γ, $c_{\gamma+1}$ *etc.* gleichfalls positiv sind. Denn es sey, wenn es möglich ist,

$$153. \quad c_\gamma = -\eta,$$

wo η eine positive Zahl bedeuten soll, so ist, weil $a_\gamma < \sqrt{B}$ war, um so mehr $a_\gamma < \sqrt{B} + \eta$; also wäre $\frac{a_\gamma}{\sqrt{B} - c_\gamma}$, oder $\frac{a_\gamma}{\sqrt{B} + \eta}$ kleiner als Eins, statt dass diese Grösse grösser als Eins seyn sollte [(152.)]. Folglich muss c_γ positiv seyn. Es sey ferner, wenn es möglich ist,

$$154. \quad c_{\gamma+1} = -\eta_1.$$

Da vermöge (139.) $c_{\gamma+1} = \lambda_{\gamma+1} a_{\gamma+1} - c_\gamma$, so ist [(154.)]

$$\lambda_{\gamma+1} a_{\gamma+1} = c_\gamma - \eta_1.$$

Da nun c_γ und η positiv und kleiner als $\sqrt{B}$ sind und $\lambda_{\gamma+1}$ ebenfalls eine ganze positive Zahl ist, so ist klar, dass auch $a_{\gamma+1}$ kleiner als $\sqrt{B}$ seyn muss, und dann wird, wie vorhin, bewiesen, dass auch $c_{\gamma+1}$ positiv ist, u. s. w.

Nähme man $\sqrt{B}$ negativ an, so liesse sich auf dieselbe Art zeigen, dass c_γ, $c_{\gamma+1}$ negativ sind, und selbst ohne die Rechnung zu wiederholen, darf man nur bemerken, dass die Ausdrücke sämmtlich die nämlichen bleiben, blos dass die Zeichen aller der Grössen a, a_1, a_2 c, c_1, c_2 und $\sqrt{B}$ wechseln, so dass man die Wurzel-Grösse $\sqrt{B}$ immer positiv annehmen kann, wenn man nur den Grössen

Näherung durch continuirliche

$a, a_1, a_2 \ldots. c, c_1, c_2 \ldots.$ entgegengesetzte Zeichen giebt.

57.

Dieses vorausgeschickt, so behaupte ich nun, dass, wenn zwei beliebige correspondirende Glieder der Reihen $a_\gamma, a_{\gamma+1}, a_{\gamma+2} \ldots.$ und $c_\gamma, c_{\gamma+1}, c_{\gamma+2} \ldots.$ gegeben sind, alle vorhergehenden der nämlichen Reihe es ebenfalls seyn müssen.

Man setze z. B. $a_{\gamma+3}$ und $c_{\gamma+3}$ wären gegeben (und dass der Beweis allgemein gilt, welches auch die gegebenen Glieder seyn mögen, ist leicht zu sehen), so darf man nur, den Ausdrücken von (§. 52.) und den Bedingungen des vorigen Paragraphs gemäss, sehen, welche die den gegebenen vorhergehenden Glieder sind.

Es ist [*zu Folge* (139.)]

$$c_{\gamma+3} = \lambda_{\gamma+3}\, a_{\gamma+3} - c_{\gamma+2}, \text{ also}$$

$$155. \quad c_{\gamma+2} = \lambda_{\gamma+3}\, a_{\gamma+3} - c_{\gamma+3}.$$

Nun soll aber $c_{\gamma+2} < \sqrt{B}$ seyn; es muss also [*weil zu Folge* (155.) $\lambda_{\gamma+3} = \frac{c_{\gamma+2} + c_{\gamma+3}}{a_{\gamma+3}}$ *ist*] nothwendig

$$156. \quad \lambda_{\gamma+3} < \frac{c_{\gamma+3} + \sqrt{B}}{a_{\gamma+3}}$$

seyn. Es ist auf dieselbe Weise [*wie* (155.)]

$$c_{\gamma+1} = \lambda_{\gamma+2}\, a_{\gamma+2} - c_{\gamma+2},$$

woraus, weil $c_{\gamma+1} < B$ ist,

Brüche.

$$157.\quad \lambda_{\gamma+2} < \frac{c_{\gamma+2} + \sqrt{B}}{a_{\gamma+2}}$$

folgt. Nun ist aber, nach der Natur des Kettenbruchs, $\lambda_{\gamma+2}$ nothwendig eine ganze positive Zahl, also ist [*vermöge* (157.)] nothwendig

$$158.\quad c_{\gamma+2} + \sqrt{B} > a_{\gamma+2}.$$

Es ist aber auch

$$159.\quad a_{\gamma+2}\, a_{\gamma+3} = B - c_{\gamma+2}^2 \quad [(138.)]$$
$$= (\sqrt{B} + c_{\gamma+2})(\sqrt{B} - c_{\gamma+2}),$$

also ist

$$160.\quad \sqrt{B} - c_{\gamma+2} < a_{\gamma+3}.$$

[*Denn da* $c_{\gamma+2} + \sqrt{B} > a_{\gamma+2}$ (158.) *und*

$$a_{\gamma+3} = (\sqrt{B} - c_{\gamma+2}) \left(\frac{c_{\gamma+2} + \sqrt{B}}{a_{\gamma+2}}\right) \text{ ist (159.),}$$

so ist

$$\sqrt{B} - c_{\gamma+2} < a_{\gamma+3}.]$$

Setzt man hierin für $c_{\gamma+2}$ seinen obigen Werth [(155.)], so erhält man

$$\sqrt{B} - \lambda_{\gamma+3}\, a_{\gamma+3} + c_{\gamma+3} < a_{\gamma+3},$$

woraus

$$161.\quad \lambda_{\gamma+3} > \frac{c_{\gamma+3} + \sqrt{B}}{a_{\gamma+3}} - 1$$

folgt.

Da nun $\lambda_{\gamma+3}$ eine ganze Zahl seyn soll, so ist klar, dass $\lambda_{\gamma+3}$ nichts anders als diejenige ganze Zahl seyn kann, welche unmittelbar kleiner, als

Näherung durch continuirliche

$\frac{c_{\gamma+3}+\sqrt{B}}{a_{\gamma+3}}$ ist. [*Denn aus* (156. *und* 161.) *zusammen genommen folgt, dass* $\lambda_{\gamma+3}$ *zwischen* $\frac{c_{\gamma+3}+\sqrt{B}}{a_{\gamma+3}}$ *und* $\frac{c_{\gamma+3}+\sqrt{B}}{a_{\gamma+3}}-1$ *liegt.*] Die Zahl $\lambda_{\gamma+3}$ ist also gegeben, und folglich $c_{\gamma+3}$ ebenfalls [*vermöge* (155.)], und da nun $a_{\gamma+2}=\frac{B-c_{\gamma+2}^2}{a_{\gamma+3}}$ (138.), so ist auch $a_{\gamma+2}$ gegeben.

Es ist ferner [*auf dieselbe Weise*]

$$c_\gamma=\lambda_{\gamma+1}a_{\gamma+1}-c_{\gamma+1}\ [155.],$$

mithin, weil $c_\gamma<\sqrt{B}$ ist,

$$\lambda_{\gamma+1}<\frac{c_{\gamma+1}+\sqrt{B}}{a_{\gamma+1}}\ [(157.)].$$

Also muss, damit $\lambda_{\gamma+1}$, wie es seyn soll, positiv sey,

$$c_{\gamma+1}+\sqrt{B}>a_{\gamma+1}$$

seyn; folglich muss, weil $a_{\gamma+1}a_{\gamma+2}=B-c_{\gamma+1}^2$ ist, $\sqrt{B}-c_{\gamma+1}<a_{\gamma+2}$, oder, wenn man für $c_{\gamma+1}$ seinen obigen Werth setzt,

$$\sqrt{B}-\lambda_{\gamma+2}a_{\gamma+2}+c_{\gamma+2}<a_{\gamma+2}$$

seyn, woraus

$$163.\quad \lambda_{\gamma+2}>\frac{c_{\gamma+2}+\sqrt{B}}{a_{\gamma+2}}-1$$

folgt; so dass $\lambda_{\gamma+2}$ nur diejenige ganze Zahl seyn kann, welche unmittelbar kleiner als die gegebene

Grösse

Grösse $\frac{c_{\gamma+2}+\sqrt{B}}{a_{\gamma+2}}$ ist, weshalb sie also gegeben ist, und die Zähler $c_{\gamma+1}$ und $a_{\gamma+1}$ es ebenfalls sind. [*Alles auf dieselbe Weise, wie oben.*]

Da endlich, nach der Voraussetzung, $a_\gamma < \sqrt{B}$ ist, so ist um so mehr $c_\gamma + \sqrt{B} > a_\gamma$, woraus, wegen $a_\gamma a_{\gamma+1} = B - c_\gamma^2$, $\sqrt{B} - c_\gamma < a_\gamma$, oder, wenn man statt c_γ dessen oben gefundenen Werth setzt,

$$\sqrt{B} - \lambda_{\gamma+1} a_{\gamma+1} + c_{\gamma+1} < a_{\gamma+1}$$

folgt, welches

$$163. \quad \lambda_{\gamma+1} > \frac{c_{\gamma+1}+\sqrt{B}}{a_{\gamma+2}} - 1$$

giebt.

Die Grösse $\lambda_{\gamma+1}$ kann also wiederum nur diejenige ganze Zahl seyn, welche zunächst kleiner ist als $\frac{c_{\gamma+1}+\sqrt{B}}{a_{\gamma+2}}$; mithin ist sie ebenfalls gegeben, und die Grössen c_γ und a_γ sind es auch. [*Alles ebenfalls auf eine ähnliche Weise, wie oben.*]

Nun sahen wir oben in (§. 53.), dass, wenn man mit den Reihen $a_\gamma, a_{\gamma+1} \ldots, c_\gamma, c_{\gamma+1} \ldots$ fortfährt, nothwendig zwei correspondirende Glieder wie $a_{\gamma+\delta}$, $c_{\gamma+\delta}$ nach einer gewissen Zahl anderer Glieder wieder kommen müssen, so dass z. B.

$$164. \quad a_{\gamma+\nu+\delta} = a_{\gamma+\delta}, \; c_{\gamma+\nu+\delta} = c_{\gamma+\delta}.$$

Näherung durch continuirliche

Vermöge dessen, was so eben bewiesen, erhält man also auch, wenn man in die Reihen rückwärts geht,

$$165.\quad \begin{cases} a_{\gamma+\nu+\delta-1} = a_{\gamma+\delta-1}, & c_{\gamma+\nu+\delta-1} = c_{\gamma+\delta-1} \\ a_{\gamma+\nu+\delta-2} = a_{\gamma+\delta-2}, & c_{\gamma+\nu+\delta-2} = c_{\gamma+\delta-2} \\ \text{etc.} & \text{etc.} \\ a_{\gamma+\nu} = a_{\gamma}, & c_{\gamma+\nu} = c_{\gamma}. \end{cases}$$

58.

Hieraus folgt allgemein, dass, wenn man in der Reihe der Grössen a, a_1, a_2 auf zwei aufeinander folgende Grössen von einerlei Zeichen stösst, diejenige, welche kleiner als $\sqrt{B}$ ist, nothwendig schon zu der Periode gehört.

Hätten also in der gegebenen Gleichung

$$a_1 x^2 - 2cx - a = 0$$

die beiden Coefficienten a und a_1 einerlei Zeichen, so wäre die Reihe derselben schon von dem ersten oder zweiten Grade an eine periodische.

Ist

$$166.\quad c = 0,$$

so dass

$$167.\quad x = \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{a_1}}\right)},$$

so ist

$$168.\quad B = a a_1;$$

woraus folgt, dass von den beiden Zahlen a und a_1 die kleinere nothwendig kleiner als $\sqrt{B}$, die grössere grösser als $\sqrt{B}$ ist. Ist also in diesem Fall die Zahl $\frac{a}{a_1}$, aus welcher die Wurzel gezogen werden soll,

Brüche.

kleiner als Eins, so ist die Reihe schon von dem ersten Gliede a ab, eine periodische. Ist $\frac{a}{a_1}$ grösser als Eins, so kann die Periode weiterhin nicht eher als vom zweiten Gliede anfangen.

59.

Man hat zwar schon längst bemerkt, dass jeder periodische Kettenbruch auf eine Gleichung des zweiten Grades reducirt werden kann; aber Niemand hatte, meines Wissens, bis jetzt gezeigt, dass sich umgekehrt jede Wurzel einer quadratischen Gleichung durch einen periodischen Kettenbruch ausdrücken lässt. Zwar sagt Euler in einer vortrefflichen Abhandlung im eilften Bande der neuen Petersburger Commentarien: die Quadrat-Wurzel jeder ganzen Zahl lasse sich durch einen periodischen Kettenbruch ausdrücken. Allein Euler hat diesen Satz, welcher nur ein einzelner Fall des obigen ist, nicht bewiesen, und er kann, wie mir scheint, nur durch Sätze, die etwa den obigen ähnlich sind, bewiesen werden.

60.

Wir gaben oben allgemeine Ausdrücke, vermittelst welcher sich alle Glieder der den Wurzeln einer gegebenen Gleichung sich nähernden Kettenbrüche finden lassen, sobald man bemerkt, dass der die Wurzel ausdrückende Kettenbruch ein periodischer Bruch ist.

Ist die gegebene Gleichung von der zweiten Ord-

Näherung durch continuirliche

nung, und man bedient sich des Verfahrens von (§. 52.), so lassen sich die Rechnungen des 48sten und der folgenden Paragraphen, durch welche die Glieder l_ϱ und L_ϱ der der Grösse x sich nähernden Brüche gefunden werden, wenn man will, noch sehr vereinfachen.

Da nämlich hier

$$x_\mu = \frac{\sqrt{B} + c_\mu}{a_{\mu+1}} \text{ und } x_{\mu+\pi} = \frac{\sqrt{B} + c_{\mu+\pi}}{a_{\mu+\pi+1}} \quad [(140.)]$$

ist, wo c_μ, $c_{\mu+\pi}$, $a_{\mu+1}$ und $a_{\mu+\pi+1}$ bekannt sind (π ist kleiner als ν), so darf man nur diese Ausdrücke in die beiden letzten Gleichungen (110.) von (§. 48.) substituiren. Dieses giebt, wenn man, der Kürze wegen,

$$169. \begin{cases} \dfrac{l_\mu c_\mu}{a_{\mu+1}} + l_{\mu-1} = f_\mu \\ \dfrac{L_\mu c_\mu}{a_{\mu+1}} + L_{\mu-1} = F_\mu \\ \dfrac{H_\nu c_\mu}{a_{\mu+1}} + H_{\nu-1} = K_\nu \\ H_\pi c_{\mu+\pi} + H_{\mu-1} a_{\mu+\pi-1} = G_\pi \end{cases}$$

setzt,

$$170. \begin{cases} \left(f_\mu + \dfrac{l_\mu \sqrt{B}}{a_{\mu+1}}\right)(G_\pi + H_\pi \sqrt{B})\left(K_\nu + \dfrac{H_\nu \sqrt{B}}{a_{\mu+1}}\right)^n \\ \qquad = l_\varrho c_{\mu+\pi} + l_{\varrho-1} a_{\mu+\pi+1} + l_\varrho \sqrt{B}, \\ \left(F_\mu + \dfrac{L_\mu \sqrt{B}}{a_{\mu+1}}\right)(G_\pi + H_\pi \sqrt{B})\left(K_\nu + \dfrac{H_\nu \sqrt{B}}{a_{\mu+1}}\right)^n \\ \qquad = L_\varrho c_{\mu+\pi} + L_{\varrho-1} a_{\mu+\pi+1} + L_\varrho \sqrt{B}; \end{cases}$$

Brüche.

woraus, wegen der Zweifachheit des Zeichens der Wurzel-Grösse $\sqrt{B}$, sogleich

171.
$$\left\{\begin{aligned}
l_\varrho &= \frac{\left(f_\mu+\frac{l_\mu\sqrt{B}}{a_{\mu+1}}\right)(G_\pi+H_\pi\sqrt{B})\left(K_\nu+\frac{H_\nu\sqrt{B}}{a_{\mu+1}}\right)^n}{2\sqrt{B}}\\
&\quad-\frac{\left(\frac{f_\mu-l_\mu\sqrt{B}}{a_{\mu+1}}\right)(G_\pi-H_\pi\sqrt{B})\left(K_\nu-\frac{H_\nu\sqrt{B}}{a_{\mu+1}}\right)^n}{2\sqrt{B}}\\
&\text{und}\\
L_\varrho &= \frac{\left(F_\mu+\frac{L_\mu\sqrt{B}}{a_{\mu+1}}\right)(G_\pi+H_\pi\sqrt{B})\left(K_\nu+\frac{H_\nu\sqrt{B}}{a_{\mu+1}}\right)^n}{2\sqrt{B}}\\
&\quad-\frac{\left(\frac{F_\mu-L_\mu\sqrt{B}}{a_{\mu+1}}\right)(G_\pi-H_\pi\sqrt{B})\left(K_\nu-\frac{H_\nu\sqrt{B}}{a_{\mu+1}}\right)^n}{2\sqrt{B}}
\end{aligned}\right.$$

folgt. [*Jede der beiden Gleichungen* (170.) *giebt nämlich zwei verschiedene Gleichungen, je nachdem man* $\sqrt{B}$ *positiv oder negativ nimmt. Da hierbei rechterhand die Glieder* $l_\varrho c_{\mu+\pi}+l_{\varrho-1}a_{\mu+\pi+1}$ *und* $L_\varrho c_{\mu+\pi}+L_{\varrho-1}a_{\mu+\pi+1}$ *das Zeichen nicht ändern, so heben sie sich auf, wenn man die entstehenden Gleichungen von einander abzieht, und es bleibt rechterhand blos* $l_\varrho\sqrt{B}$ *und* $L_\varrho\sqrt{B}$, *welches dann die Gleichung* (171.) *giebt.*] Die Grösse ϱ ist, wie oben, gleich $\mu+n\nu+\pi$.

Näherung durch continuirliche

61.

Es ist auch zu bemerken, dass die Grösse L_ϱ aus l_ϱ und $l_{\varrho-1}$ ohne neue Rechnung gefunden werden kann.

Da nämlich

$$172.\quad x = \frac{c + \sqrt{B}}{a_1}\ (134.) = \frac{a}{\sqrt{B} - c}\ (151.),$$

und eben so

$$173.\quad x_\varrho = \frac{a_\varrho}{\sqrt{B} - c_\varrho},$$

so erhält man aus der Gleichung (130. §. 51.)

$$174.\quad \frac{a}{\sqrt{B} - c} = \frac{l_\varrho a_\varrho + l_{\varrho-1}(\sqrt{B} - c_\varrho)}{L_\varrho a_\varrho + L_{\varrho-1}(\sqrt{B} - c_\varrho)},$$

oder

$$175.\quad a(L_\varrho a_\varrho + L_{\varrho-1}(\sqrt{B} - c_\varrho) =$$
$$l_\varrho a_\varrho(\sqrt{B} - c) + l_{\varrho-1}(B + c c_\varrho - (c_\varrho + c)\sqrt{B}),$$

so dass man, wenn man die rationalen und die irrationalen Theile einander gleich setzt,

$$L_{\varrho-1} = \frac{l_\varrho a_\varrho - l_{\varrho-1} c_\varrho + c}{a}$$

$$L_\varrho a_\varrho - L_{\varrho-1} c_\varrho = \frac{-l_\varrho a_\varrho c + l_{\varrho-1}(B + c c_\varrho)}{a}$$

erhält, woraus, wegen $B - c_\varrho^2 = a_\varrho a_{\varrho+1}$,

$$176.\quad L_\varrho = \frac{l_\varrho(c_\varrho - c) + l_{\varrho-1} L_{\varrho+1}}{a}$$

folgt. [*Das Gleichsetzen der rationalen und irra-*

tionalen Theile einzeln, kann hier deshalb geschehen, weil eine Gleichung, die, wie die gegenwärtige, eine quadratische Wurzel-Grösse enthält, wegen der Zweifachheit des Zeichens der Wurzel-Grösse, eigentlich zwei Gleichungen ausmacht, aus welchen man, wenn man dieselben addirt und subtrahirt, zwei andere Gleichungen finden kann, deren eine die Wurzel-Grösse gar nicht, also nur die rationalen Theile, die andere die Wurzel-Grösse als allgemeinen Factor, also nur die irrationalen Theile enthält, welches das Nämliche ist, als wenn man die rationalen und die irrationalen Theile für sich gleich setzt.]

Da nun $\varrho = \mu + n\nu + \pi$ ist, so ist

$$c_\varrho = c_{\mu+\pi} \text{ und } a_{\varrho+1} = a_{\mu+\pi+1},$$

so dass c_ϱ und $a_{\varrho+1}$ für jeden Werth von ϱ bekannt sind.

62.

Wir wollen, um ein Beispiel von der Anwendung der obigen Ausdrücke zu geben, annehmen, man verlange den Ausdruck der Quadrat-Wurzel aus $\frac{11}{3}$ durch einen Kettenbruch.

Man setze $x = \sqrt{\frac{11}{3}}$, so erhält man die Gleichung

$$177. \quad 3x^2 - 11 = 0,$$

also ist in (132. §. 52.) $a = 2$, $a_1 = 3$, $c = 0$. Dieses giebt [*nach dem Ausdruck* (139.)], weil zu Folge (138.) $B = 33$ ist, folgende Rechnung:

Näherung durch continuirliche

178.
$$\begin{cases} a = 11 & c = 0 \\ a_1 = \frac{33-0}{11} = 3, \lambda_1 < \frac{\sqrt{33}+0}{3} = 1 & c_1 = 1.3-0 = 3 \\ a_2 = \frac{33-9}{3} = 8, \lambda_2 < \frac{\sqrt{33}+3}{8} = 1 & c_2 = 1.8-3 = 5 \\ a_3 = \frac{33-25}{8} = 1, \lambda_3 < \frac{\sqrt{33}+5}{1} = 10 & c_3 = 10.1-5 = 5 \\ a_4 = \frac{33-25}{1} = 8, \lambda_4 < \frac{\sqrt{33}+5}{8} = 1 & c_4 = 1.8-5 = 3 \\ a_5 = \frac{33-9}{8} = 3, \lambda_5 < \frac{\sqrt{33}+3}{3} = 2 & c_5 = 2.3-3 = 3. \end{cases}$$

Man kann hier stehen bleiben, weil man sieht, dass

$$a_5 = a_1 \text{ und } c_5 = c_1$$

ist, so dass also in diesem Falle hier

$$\mu = 1 \text{ und } \nu = 4$$

und folglich

179. $$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{10 \ldots}}}}}}$$

ist.

63.

Dieses also wäre der Kettenbruch, welcher den Werth von $\sqrt{\frac{11}{3}}$ ausdrückt. Verlangt man Brüche, welche sich diesem Kettenbruche nähern, so muss man in die Ausdrücke von (§. 60.) $\mu = 1$, $\nu = 4$

Brüche.

und, weil π kleiner als 4 seyn soll, der Reihe nach $\pi = 0, 1, 2, 3$ setzen.

Dieses giebt $l_\mu = l_1$ (92. §. 47.) $\lambda_1 = 1$, $l_{\mu-1} = l = 1$, $c_\mu = c_1 = 3$, $a_{\mu+1} = a_2 = 8$, also in (§. 60. Gleichung 169.) $f_\mu = \frac{1 \cdot 3}{8} + 1 = \frac{11}{8}$. Auf dieselbe Weise findet man $L_\mu = 1$, $F_\mu = \frac{3}{8}$. Hierauf berechne man die Werthe von H, H_1 *etc.* bis $H_\nu = H_4$ aus den Gleichungen (106. §. 48.), welches

$$H = 0,$$
$$H_1 = 1,$$
$$H_2 = \lambda_3 H_1 = 10,$$
$$H_3 = \lambda_4 H_2 + H_1 = 11,$$
$$H_4 = \lambda_5 H_4 + H_2 = 32$$

giebt, woraus $H_\nu = 32$, $H_{\nu-1} = 11$, und also $K = \frac{32 \cdot 3}{8} + 11 = 23$ folgt.

Nun sey

Erstlich $\pi = 0$, so erhält man $H_\pi = 0$ und $H_{\pi-1} = 1$; denn es ist aus den Gleichungen (106.) leicht zu sehen, dass das dem Gliede H vorhergehende Glied nothwendig 1 ist. Es ist nämlich $H_1 = \lambda_{\mu+1} H + H_{\pi-1}$. Eben so lässt sich zeigen, dass das Glied, welches dem Gliede H vorhergeht, c ist. Also ist $G_\pi = a_{\mu+1} = 8$.

Zweitens. Es sey $\pi = 1$, so ist $H_\pi = 1$, $H_{\pi-1} = 8$, also

$$G_\pi = c_{\mu+1} = c_2 = 5.$$

Näherung durch continuirliche

Drittens. Es sey $\pi = 2$, so ist

$$H_\pi = 10,\ H_{\pi-1} = 1,\ G_\pi = 10\, c_{\mu+2} + 1 . a_{\mu+3}$$
$$= 10 c_3 + a_4 = 58.$$

Viertens. Es sey $\pi = 3$, so ist

$$H_\pi = 11,\ H_{\pi-1} = 10 \text{ und } G_\pi = 11 c_4 + 10 a^5 = 63.$$

Substituirt man diese Werthe in die Ausdrücke von l_ϱ und L_ϱ in (§. 60.) und multiplicirt, der Kürze wegen, die Factoren $f_\mu \pm \frac{l_\mu \sqrt{B}}{a_{\mu+1}}$ und $G_\pi \pm H_\pi \sqrt{B}$, so wie $F_\mu = \frac{L_\mu \sqrt{B}}{a_{\mu+1}}$ und $G_\pi = H_\pi \sqrt{B}$ in einander, welches die einfachen Factoren

$$f_\mu G_\pi + \frac{l_\mu H_\pi B}{a_{\mu+1}} \pm \left(f_\mu H_\pi \pm \frac{l_\mu G_\pi}{a_{\mu+1}}\right)\sqrt{B} \text{ und}$$

$$F_\mu G_\pi + \frac{L_\mu H_\pi B}{a_{\mu+1}} \pm \left(F_\mu H_\pi \pm \frac{L_\mu G_\pi}{a_{\mu+1}}\right)\sqrt{B}$$

giebt, so erhält man folgende Ausdrücke:

$$l_{4n+1} = \frac{(11+\sqrt{33})(23+4\sqrt{33})^n - (11-\sqrt{33})(23-4\sqrt{33})^n}{2\sqrt{33}},$$

$$L_{4n+1} = \frac{(3+\sqrt{33})(23+4\sqrt{33})^n - (3-\sqrt{33})(23-4\sqrt{33})^n}{2\sqrt{33}},$$

$$l_{4n+2} = \frac{(11+2\sqrt{33})(23+4\sqrt{33})^n - (11-2\sqrt{33})(23-4\sqrt{33})^n}{2\sqrt{33}},$$

Brüche.

$$L_{4n+2} = \frac{(6+\sqrt{33})(23+4\sqrt{33})^n - (6-\sqrt{33})(23-4\sqrt{33})^n}{2\sqrt{33}},$$

$$l_{4n+3} = \frac{(121+21\sqrt{33})(23+4\sqrt{33})^n - (121-21\sqrt{33})(23-4\sqrt{33})^n}{2\sqrt{33}},$$

$$L_{4n+3} = \frac{(63+11\sqrt{33})(23+4\sqrt{33})^n - (63-11\sqrt{33})(23-4\sqrt{33})^n}{2\sqrt{33}},$$

$$l_{4n+4} = \frac{(132+23\sqrt{33})(23+4\sqrt{33})^n - (132-23\sqrt{33})(23-4\sqrt{33})^n}{2\sqrt{33}},$$

$$L_{4n+4} = \frac{(69+12\sqrt{33})(23+4\sqrt{33})^n - (69-12\sqrt{33})(23-4\sqrt{33})^n}{2\sqrt{33}},$$

vermittelst welcher man die Werthe der der Wurzel aus $\frac{11}{3}$ sich nähernden Brüche $\frac{l_1}{L_1}$, $\frac{l_2}{L_2}$, $\frac{l_3}{L_3}$ *etc.* finden kann.

Setzt man nämlich zuerst $n = 0$, so erhält man die vier nächsten Brüche; setzt man $n = 1$, so erhält man die vier folgenden u. s. w. Diese Brüche sind

$$\left[\sqrt{\tfrac{11}{3}} =\right] \tfrac{1}{1},\ \tfrac{2}{1},\ \tfrac{21}{11},\ \tfrac{23}{12},\ \tfrac{56}{35},\ \tfrac{90}{47},\ \tfrac{967}{505},\ \tfrac{1057}{552}\ \textit{etc.}$$

Verlangt man z. B. den funfzigsten Bruch dieser Reihe, das heisst den Bruch $\frac{l_{50}}{L_{50}}$, so muss man 50 durch 4 dividiren, welches 12 zum Quotienten und 2 zum Reste giebt. Man muss also $n = 12$ setzen. Entwickelt man die zwölfte Potenz von $23 \pm 4\sqrt{33}$ und setzt, der Kürze wegen,

Näherung durch continuirliche

$$23^{12} + 66.33.4^{2}.23^{12} + 495.33^{2}.4^{4}.23^{3}$$
$$+ 924.33^{3}.4^{6}.23^{6} + 495.33^{4}.4^{8}.23^{4}$$
$$+ 66.33^{5}.4^{10}.23^{2} + 33^{6}.4^{12} = M,$$

$$12.4.23^{11} + 220.33.4^{8}.23^{9} + 792.33^{2}.4^{5}.23^{2}$$
$$+ 792.39^{9}.4^{7}.23^{5} + 220.33^{4}.4^{9}.23^{3} + 12.36^{6}.4^{11}.23 = N,$$

so erhält man

$$(23 \pm 4\sqrt{33})^{n} = M \pm N\sqrt{33}.$$

Substituirt man dieses in die obigen Ausdrücke von l_{4n+2} und L_{4n+2}, so ist der gesuchte Bruch

$$\frac{2M + 11N}{M + 6N}.$$

64.

Ich beschliesse Gegenwärtiges durch folgende Bemerkung, welche mir der Aufmerksamkeit werth zu seyn scheint.

Wenn nämlich die gegebene Gleichung commensurable Divisoren der ersten Ordnung hat, so brechen die Kettenbrüche, welche die Wurzeln dieser Divisoren ausdrücken, nothwendig ab. Hat die gegebene Gleichung commensurable Divisoren der zweiten Ordnung mit reellen Wurzeln, so sind die Kettenbrüche, welche die Wurzeln dieser Divisoren ausdrücken, nothwendig periodische Kettenbrüche. Also hat die Methode der Kettenbrüche nicht allein den Vortheil, dass sie immer die nächsten rationalen Werthe der gesuchten Wurzeln giebt, sondern sie giebt auch die commensurablen Divisoren erster und zweiter Ordnung, welche in der gegebenen Gleichung

enthalten seyn können. Es wäre zu wünschen, dass man ähnliche Kennzeichen der Existenz commensurabler Divisoren der dritten und vierten Ordnung hätte, wenn die gegebene Gleichung dergleichen enthält. Diese Untersuchung scheint mir die Aufmerksamkeit der Mathematiker zu verdienen.

Dritte Abtheilung.

Verallgemeinerung der Theorie der Kettenbrüche.

65.

Wir nahmen im dritten Abschnitte an, dass die Zahlen p, q, r *etc.* die ganzzahligen Werthe der Wurzeln x, y, z *etc.* und kleiner als die Wurzeln seyn sollen, das heisst, dass p, q, r *etc.* diejenigen ganzen Zahlen seyn sollen, welche zunächst kleiner sind als die Werthe von x, y, z.... Es hindert indessen nichts, auch p, q, r.... die ganzen Zahlen bedeuten zu lassen, welche zunächst grösser sind, als die Wurzeln x, y, z....

66.

Man setze also, p bedeute diejenige ganze Zahl, welche zunächst grösser ist als x, so dass $p > x$ und $p - 1 < x$, so ist klar, dass man dann $x = p - \frac{1}{y}$, das heisst y negativ nehmen muss; und da nun $x < p$ und $> p - 1$ ist, so ist $\frac{1}{y} > 0$ und < 1, und folglich

Näherung durch continuirliche

$y > 1$, wie in dem Falle, wenn p kleiner als x ist (§. 18.). Man kann also ferner für q die ganze Zahl annehmen, welche entweder unmittelbar kleiner oder grösser ist als y. Im ersten Falle setze man $y = q + \frac{1}{z}$, im andern $y = q - \frac{1}{z}$ u. s. w.

Dieses giebt

180. $x = p \pm \frac{1}{y}$, $y = q \pm \frac{1}{z}$, $z = r \pm \frac{1}{u}$ etc.

also den Kettenbruch

181. $$x = p \pm \cfrac{1}{q \pm \cfrac{1}{r \pm \cfrac{1}{u \ldots,}}}$$

wobei zu bemerken, dass jeder der Nenner q, r *etc.* auf welchen das Zeichen — folgt, nothwendig $= 2$, oder > 2 seyn muss. Denn weil $y > 1$ ist, so erhält man, wenn man $y = q - \frac{1}{z}$ setzt, $q - \frac{1}{z} > 1$, also $q > 1 + \frac{1}{z}$. Da nun q eine ganze Zahl seyn soll, so ist es entweder $= 2$ oder < 2 u. s. w.

67.

Nun bemerke ich, dass diese Art von Brüchen, welche, wie oben, additiv und subtractiv fortschreiten, immer leicht in andere verwandelt werden können, welche blos additiv fortschreiten.

Man setze nämlich allgemein

182. $a - \frac{1}{t} = A + \frac{1}{T}$,

wo a und A ganze Zahlen, und t und T grösser als Eins sind. Dieses giebt $a - A = \frac{1}{t} + \frac{1}{T}$, also, weil $\frac{1}{t} < 1$ und $\frac{1}{T} < 1$ ist, $\frac{1}{t} + \frac{1}{T} < 2$. Man kann also $a - A = 1$ setzen, welches $A = a - 1$ giebt. Dieses giebt $a - \frac{1}{t} = a - 1 + \frac{1}{T}$, oder $\frac{1}{T} = 1 - \frac{1}{t}$ und $T = \frac{t}{t-1} = 1 + \frac{1}{t-1}$, so dass also [*aus* (182.)] allgemein

$$183.\quad a - \frac{1}{t} = a - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{t-1}}.$$

Vermittelst dieses Ausdrucks lassen sich aus jedem Kettenbruche die Zeichen — wegschaffen.

Es sey z. B. der Bruch

$$p - \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r \ldots}}$$

gegeben, so erhält man für denselben, wenn man in (183.) $a = p$ und $t = q + \frac{1}{r}$ setzt,

$$p - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{q - 1 + \cfrac{1}{r \ldots}}}.$$

Wäre der gegebene Bruch

$$p - \cfrac{1}{q - \cfrac{1}{r \ldots}},$$

Näherung durch continuirliche

so lässt sich derselbe zunächst in

$$p-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{q-1-\cfrac{1}{r\ldots.}}}$$

und hierauf in

$$p-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{q-2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{r-1\ldots.}}}}$$

verwandeln u. s. w. Es können bei diesen Verwandlungen zuweilen Nenner verschwinden. Aldann vereinfacht sich der Ausdruck des Bruchs.

Man setze z. B., der gegebene Bruch sey

$$p-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{r\ldots.}},$$

so ist der verwandelte Bruch [*vermöge* (183.)]

$$p-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{0+\cfrac{1}{r\ldots.}}},$$

oder

$$p-1+\frac{1}{1+r\ldots.}.$$

Eben so, wenn der gegebene Bruch

$$p-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{r\ldots.}}$$

wäre, so liesse sich derselbe auf

$p-1$

Brüche.

$$p - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{r - 1 \ldots ,}}}}$$

oder auf

$$p - 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{r - 1 , \ldots}}$$

reduciren u. s. w.

68.

Aus der Reductions-Formel (183.), welche sich auch auf die Gestalt

$$184. \quad a + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{t}} = a + 1 - \frac{1}{t + 1}$$

bringen lässt [*denn auch diese Gleichung ist, wie die* (183.), *welche* $a - \frac{1}{t} = a - 1 + \frac{t - 1}{t} = a \frac{-t + t - 1}{t} = a - \frac{1}{t}$ *giebt, identisch, sie giebt* $a + \frac{t}{1 + t} = a + \frac{t}{1 + t}$], folgt, dass ein Kettenbruch, in welchem alle Glieder das Zeichen + haben, zuweilen dadurch vereinfacht werden kann, dass man das Zeichen — einführt. Dieses ist der Fall, sobald Nenner vorkommen, welche der Einheit gleich sind. Es sey z. B. der Bruch

$$p + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{r + \ldots .}}$$

Näherung durch continuirliche

gegeben, so lässt sich derselbe [*vermöge* (184.)] auf

$$p + 1 - \cfrac{1}{r + 1 \ldots}$$

bringen, welcher Bruch, wie man sieht, ein Glied weniger hat.

Wäre der gegebene Bruch

$$p + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{s \ldots}}},$$

so würde sich derselbe auf

$$p + 1 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{s \ldots}}$$

reduciren lassen.

Wenn man den Bruch

$$p + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{s \ldots}}}}$$

hätte, so liesse sich derselbe zunächst auf

$$p + \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{s \ldots}}}},$$

und sodann auf

$$p + 1 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{s + 1 \ldots}}$$

bringen.

Brüche.

Daraus folgt allgemein, dass man einen Kettenbruch, welcher überall das Zeichen +, und zugleich Nenner hat, die gleich Eins sind, allemal in einen andern verwandeln kann, welcher so viele Glieder weniger hat, als Nenner gleich Eins sind, in so fern diese nicht unmittelbar auf einander folgen. Denn folgen dergleichen zwei auf einander unmittelbar, so lässt sich nur ein Glied wegschaffen; folgen drei auf einander, so kann man nur zwei Glieder wegschaffen, und allgemein, wenn $2n$ oder $2n+1$ Nenner, gleich Eins, auf einander folgen, nur n oder $n+1$ Glieder.

Der bekannte Kettenbruch

185. $$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2\ldots}}}}}}}}$$

für den Umfang eines Kreises, dessen Durchmesser $=1$ ist, lässt sich also auf einen andern Kettenbruch reduciren, welcher schon drei Glieder weniger hat, nämlich auf den Bruch

186. $$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{16-\cfrac{1}{294-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{3\ldots}}}}}$$

Näherung durch continuirliche

69.

Um die Kettenbrüche, deren Zeichen sämmtlich positiv sind, mit andern, in welchen negative Zeichen vorkommen, in einen Ausdruck zusammenzufassen, darf man nur bei den letzten alle negative Zeichen in die Nenner bringen, welches leicht ist. Es sey z. B. der Bruch

$$p - \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r - \cfrac{1}{s + \ldots}}}$$

gegeben, so ist klar, dass sich derselbe zunächst in

$$p + \cfrac{1}{-q - \cfrac{1}{r - \cfrac{1}{s + \ldots}}},$$

und hierauf in

$$p + \cfrac{1}{-q + \cfrac{1}{-r + \cfrac{1}{s + \ldots}}}$$

verwandeln lässt u. s. w.

Auf diese Weise ist also die allgemeine Form der Kettenbrüche, von welcher oben die Rede war, immer folgende:

$$187.\quad p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \ldots}}$$

wo p, q, r.... sämmtlich ganze Zahlen sind, die aber

Brüche.

positiv und negativ seyn können, anstatt dass man sie bis jetzt blos positiv annahm.

Es ist indessen zu bemerken, dass, wenn irgend einer der Nenner q, r *etc.* gleich $+1$ oder -1 ist, der folgende Nenner nothwendig das nämliche Zeichen haben muss. Dieses folgt daraus, weil zu Folge (§. 68.) auf einen positiven Nenner, welcher der Einheit gleich ist, niemals das Zeichen $-$ folgen kann.

70.

Hieraus folgt, dass die Näherungs-Methode des dritten Abschnitts auf nachstehende Weise verallgemeinert werden kann.

Die gesuchte Wurzel sey x, so nehme man für p diejenige ganze Zahl an, welche x am nächsten kommt, das heisst, man mache p einer der beiden [*unmittelbar auf einander folgenden*] ganzen Zahlen gleich, zwischen welchen der genaue Werth von x fällt. Diese Zahlen kann man allemal nach dem ersten Abschnitte finden. Hierauf setze man $x = p + \frac{1}{y}$, welches eine transformirte Gleichung nach y giebt, die nothwendig eine positive oder negative Wurzel haben muss, welche grösser ist als Eins. Man nehme wieder diejenige ganze Zahl q, welche y auf die nämliche Weise nahe kommt, sie sey grösser oder kleiner als y, setze $y = q + \frac{1}{z}$ u. s. w.

Hat die Gleichung in x mehrere Wurzeln, so findet der Inhalt von (§. 19.) auf die transformirten Gleichungen mit y, z, u *etc.* Anwendung.

Näherung durch continuirliche

Wäre also

$$x = p + \frac{1}{y},\ y = q + \frac{1}{z},\ z = r + \frac{1}{u}\ etc.,$$

so wäre

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r \ldots}},$$

wo die Nenner, dem Obigen zu Folge, positiv und negativ seyn können. Dieser Bruch kann alsdann, wenn man will, nach (§. 67.) in einen andern verwandelt werden, dessen Nenner sämmtlich positiv sind und der nur das Zeichen + hat.

Der Vorzug dieses Verfahrens besteht darin, dass man nach Belieben für p, q, $r \ldots$ ganze Zahlen setzen kann, die unmittelbar, sowohl grösser als kleiner als die Wurzeln x, y, $z \ldots$ sind, welches zuweilen die Rechnung abkürzt, wie sich weiter unten zeigen wird.

Uebrigens muss man, wenn man den kürzesten und folglich den convergentesten Kettenbruch verlangt, die Zahlen p, q, $r \ldots$ immer kleiner als die Wurzeln x, y, $z \ldots$ annehmen, so lange dieselben nicht 1 sind. Sobald sich eine darunter findet, die 1 ist, muss man die vorhergehende um 1 vergrössern, das heisst die ganze Zahl nehmen, welche unmittelbar grösser ist als die zugehörige Wurzel, wie solches aus dem folgt, was wir von diesem Gegenstand in (§. 68.) zeigten.

Brüche.

71.

Setzt man nun, wie in (§. 23.),

$$188. \begin{cases} p = \alpha & 1 = \alpha_, \\ \alpha q + 1 = \beta & \alpha_, q = \beta_, \\ \beta r + \alpha = \gamma & \beta_, r + \alpha_, = \gamma_, \\ \gamma s + \beta = \delta & \gamma_, s + \beta_, = \delta_, \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{cases}$$

so erhält man, wenn man noch den Bruch $\frac{1}{0}$ hinzufügt, der grösser ist, als jede mögliche Grösse, folgende Brüche:

$$189. \quad \frac{1}{0}, \frac{\alpha}{\alpha_,}, \frac{\beta}{\beta_,}, \frac{\gamma}{\gamma_,}, \frac{\delta}{\delta_,} \text{ etc.},$$

welche sich nothwendig dem Werthe von x nähern müssen.

Ueber die Eigenschaften dieser Brüche ist Folgendes zu bemerken.

Erstlich ist allgemein [*wie aus* (188.) *folgt*]

$$190. \begin{cases} \alpha 0 - 1\alpha_, = -1 \\ \beta \alpha_, - \alpha \beta_, = +1 \\ \gamma \beta_, - \beta \gamma_, = -1 \\ \delta \gamma_, - \gamma \delta_, = +1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{cases}$$

woraus man sieht, dass die Zahlen α, $\alpha_,$, β, $\beta_,$.... nie einen gemeinschaftlichen Theiler haben [*weil der andere Theil der Gleichung* (190.) *immer* 1 *und also durch keine ganze Zahl ausser* 1 *theilbar ist*], und dass also die Brüche $\frac{\alpha}{\alpha_,}$, $\frac{\beta}{\beta_,}$, $\frac{\gamma}{\gamma_,}$ *etc.* [(189.)] schon auf die kleinsten Zahlen gebracht sind.

Näherung durch continuirliche

Zweitens. Die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma \ldots . \alpha_{,}, \beta_{,}, \gamma_{,} \ldots$ können positiv oder negativ seyn. Wenn x positiv ist, so müssen Zähler und Nenner der Brüche (189.) einerlei Zeichen haben, verschiedene Zeichen aber, wenn x negativ ist; und wenn man vom Zeichen abstrahirt, so wachsen die Zahlen immer fort.

Drittens, weil $x = p + \frac{1}{y}$, $y = q + \frac{1}{z}$ *etc.*, so ist

$$191. \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{\alpha y + 1}{\alpha_{,} y} \\ x = \dfrac{\beta z + \alpha}{\beta_{,} z + \alpha_{,}} \\ x = \dfrac{\gamma u + \beta}{\gamma_{,} u + \beta_{,}} \\ \ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

[*Es ist z. B. aus* $x = p + \frac{1}{y}$, $x = \frac{py + 1}{y} = \frac{\alpha y + 1}{\alpha_{,} y}$ (188.), *aus* $y = q + \frac{1}{z}$, $y = \frac{qz + 1}{z}$,

also $x = \dfrac{p\left(\frac{qz+1}{z}\right) + 1}{\frac{qz+1}{z}}$, *oder* $x = \dfrac{p(qz+1) + z}{qz + 1}$

$= \dfrac{(pq + 1)z + p}{qz + 1} = \dfrac{(\alpha q + 1)z + \alpha}{\beta_{,} z + 1} = \dfrac{\beta z + \alpha}{\beta_{,} z + \alpha_{,}}$ (188.) *u. s. w.*]

72.

Sind also im allgemeinen π, ϱ, σ drei auf einander folgende Glieder der Reihe $\alpha, \beta, \gamma \ldots .$ und $\pi_{,}$, $\varrho_{,}$, $\sigma_{,}$ die correspondirenden Glieder der Reihe $\alpha_{,}, \beta_{,}$

Brüche.

$\gamma_{,} \ldots$, so dass $\frac{\pi}{\pi_{,}}$, $\frac{\varrho}{\varrho_{,}}$, $\frac{\sigma}{\sigma_{,}}$ drei auf einander folgende, dem Werthe von x sich nähernde Brüche sind, so ist

$$192. \left\{ \begin{array}{l} \varrho\pi_{,} - \pi\varrho_{,} = \pm 1 \text{ und} \\ \sigma\varrho_{,} - \varrho\sigma_{,} = \mp 1 \end{array} \right\} [(190.)]$$

Die oberen Zeichen gelten, wenn die Zahl des Bruches $\frac{\varrho}{\varrho_{,}}$ ungerade, die untern, wenn die Zahl des Bruches gerade ist, und zwar den Bruch $\frac{1}{0}$ mitgezählt. Desgleichen ist, abgesehen vom Zeichen,

193. $\varrho > \pi$, $\sigma > \varrho$, $\varrho_{,} > \pi_{,}$, $\sigma_{,} > \varrho_{,}$ [(§. 71.) *Zweitens.*]

Endlich, wenn das zugehörige Glied der Reihe x, y, $z \ldots$, t ist, so ist genau

$$194. \quad x = \frac{\varrho t + \pi}{\varrho_{,} t + \pi_{,}} \quad [(191.)],$$

und, wenn k die der Zahl t am nächsten kommende ganze Zahl ist, sie sey grösser oder kleiner als t, so ist

$$195. \quad \sigma = \varrho k + \pi \text{ und } \sigma_{,} = \varrho_{,} k + \pi_{,} \quad [(188.)]$$

73.

Dieses vorausgeschickt, wollen wir den Bruch $\frac{\varrho}{\varrho_{,}}$ untersuchen, und sehen, um wie viel derselbe noch von dem wahren Werthe von x abweicht. Man findet

$$x - \frac{\varrho}{\varrho_{,}} = \frac{\varrho t + \pi}{\varrho_{,} t + \pi_{,}} - \frac{\varrho}{\varrho_{,}} \; [(194.)] = \frac{\varrho_{,}\pi - \varrho\pi_{,}}{\varrho_{,}(\varrho_{,} t + \pi_{,})}$$

$$= \mp \frac{1}{\varrho_{,}(\varrho_{,} t + \pi_{,})} \; [(192.)],$$

Näherung durch continuirliche

also

$$196.\quad x = \frac{\varrho}{\varrho_{,}} \mp \frac{1}{\varrho_{,}(\varrho_{,} t + \pi_{,})}.$$

Die Abweichung ist also

$$\mp \frac{1}{\varrho_{,}(\varrho_{,} t + \pi_{,})}.$$

Wenn nun π und $\tau + 1$ die beiden ganzen Zahlen sind, zwischen welchen der genaue Werth von t fällt, so ist klar, dass die Grösse $\varrho_{,} t + \pi_{,}$ zwischen $\varrho_{,}\tau + \pi_{,}$ und $\varrho_{,}(\tau + 1) + \pi_{,}$ fällt, und dass also die Abweichung zwischen den Grenzen

$$197.\quad \mp \frac{1}{\varrho_{,}(\varrho_{,}\tau + \pi_{,})} \text{ und } \mp \frac{1}{\varrho_{,}(\varrho_{,}(\tau+1)+\pi_{,})}$$

liegt.

Nun aber kann man $k = \tau$ und $k = \tau + 1$ sezzen, [k *war im vorigen Paragraph diejenige ganze Zahl, welche* t *am nächsten kommt, sie sey grösser oder kleiner,*] so dass

$$\sigma_{,} = \varrho_{,}\tau + \pi_{,}, \text{ oder } \sigma = \varrho_{,}(\tau + 1) + \pi_{,}$$

ist. Bezeichnet man also, um die beiden Fälle zu unterscheiden, den Nenner des auf $\frac{\varrho}{\varrho_{,}}$ folgenden Bruchs, wenn $k < t$ ist, durch $\sigma_{,}$, und, wenn $k > t$ ist, durch $\Sigma_{,}$, so folgt, dass die Abweichung nothwendig zwischen den Grenzen

$$198.\quad \mp \frac{1}{\varrho_{,}\sigma_{,}} \text{ und } \mp \frac{1}{\varrho_{,}\Sigma_{,}}$$

liegt.

Hieraus folgt, dass der Fehler, von einem Bruch zum andern, weil die Nenner $\varrho_{,}$ und $\sigma_{,}$ oder $\Sigma_{,}$ immerfort wachsen, nothwendig immerfort abnimmt.

Brüche.

Desgleichen ist der Fehler, weil $\sigma_{,} > \varrho_{,}$ und $\Sigma_{,} > \varrho$ ist, nothwendig kleiner als

$$199. \quad \mp \frac{1}{\varrho_{,}^{2}},$$

das heisst, die Abweichung jedes Bruchs von dem wahren Werthe ist kleiner als die Einheit dividirt durch das Quadrat vom Nenner des Bruchs. Hieraus sieht man auch, dass der Bruch $\frac{\varrho}{\varrho_{,}}$ dem Werthe von x näher kommt als jeder andere Bruch in kleinern Zahlen. Denn man setze, der Bruch $\frac{m}{n}$ nähere sich x mehr als der Bruch $\frac{\varrho}{\varrho_{,}}$, während $n < \varrho_{,}$ ist, so muss $\frac{m}{n}$, weil x zwischen $\frac{\varrho}{\varrho_{,}}$ und $\frac{\varrho}{\varrho_{,}} + \frac{1}{\varrho_{,}^{2}}$, oder zwischen $\frac{\varrho}{\varrho_{,}}$ und $\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - \frac{1}{\varrho_{,}^{2}}$ liegt, nothwendig ebenfalls zwischen diese Grenzen fallen. Die Differenz zwischen $\frac{\varrho}{\varrho_{,}}$ und $\frac{m}{n}$ muss also $< \frac{1}{\varrho_{,}^{2}}$ seyn. Sie ist aber gleich $\left[\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - \frac{m}{n} =\right] \frac{n\varrho - m\varrho_{,}}{n\varrho_{,}}$, und der Zähler dieses Bruchs kann nicht kleiner als Eins seyn [*weil Eins die kleinste ganze Zahl ist*], der Nenner aber ist nothwendig grösser als $\varrho_{,}^{2}$, weil nach der Voraussetzung $\varrho_{,} > n$ ist, also ist $\frac{n\varrho - m\varrho_{,}}{n\varrho_{,}}$ nicht kleiner als $\frac{1}{\varrho_{,}^{2}}$, und folglich nähert sich der Bruch $\frac{m}{n}$ dem Werthe von x nicht mehr als der Bruch $\frac{\varrho}{\varrho_{,}}$.

Näherung durch continuirliche

74.

Uebrigens ist zu bemerken, dass, wenn die Nenner $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$.... alle einerlei Zeichen oder abwechselnde Zeichen haben, die Fehler abwechselnd positiv und negativ sind, so dass die Brüche $\frac{\alpha}{\alpha_{,}}$, $\frac{\beta}{\beta_{,}}$, $\frac{\gamma}{\gamma_{,}}$ *etc.* abwechselnd kleiner oder grösser sind als der wahre Werth von x, wie wir schon im (§. 23.) bemerkten. Dieser Satz aber hört auf, wenn die Zahlen $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$.... nicht zu zweien gleiche oder abwechselnde Zeichen haben, welches der Fall ist, wenn unter den Nennern q, r, s.... des Kettenbruchs positive und negative sind, das heisst, wenn man die sich nähernden Werthe x, y, z.... bald grösser, bald kleiner als den wirklichen Werth nimmt.

75.

Verlangt man statt der convergenten Brüche $\frac{\alpha}{\alpha_{,}}$, $\frac{\beta}{\beta_{,}}$, $\frac{\gamma}{\gamma_{,}}$.... eine Reihe abnehmender Glieder, so wäre zu bemerken, dass

$$200.\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\beta}{\beta_{,}}-\frac{\alpha}{\alpha_{,}} &= \frac{\beta\alpha_{,}-\alpha\beta_{,}}{\alpha_{,}\beta_{,}} = +\frac{1}{\alpha_{,}\beta_{,}} \\ \frac{\gamma}{\gamma_{,}}-\frac{\beta}{\beta_{,}} &= \frac{\gamma\beta_{,}-\beta\gamma_{,}}{\beta_{,}\gamma_{,}} = -\frac{1}{\beta_{,}\gamma_{,}} \\ \frac{\delta}{\delta_{,}}-\frac{\gamma}{\gamma_{,}} &= \frac{\delta\gamma_{,}-\gamma\delta_{,}}{\gamma_{,}\delta_{,}} = +\frac{1}{\gamma_{,}\delta_{,}} \end{aligned}\right\} (190.)$$

etc. ist, woraus, weil $\alpha_{,} = 1$ (188.) ist,

Brüche.

$$\frac{\beta}{\beta_{,}} = \alpha + \frac{1}{\alpha_{,}\beta_{,}}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma_{,}} = \alpha + \frac{1}{\alpha_{,}\beta_{,}} - \frac{1}{\beta_{,}\gamma_{,}}$$

$$\frac{\delta}{\delta_{,}} = \alpha + \frac{1}{\alpha_{,}\beta_{,}} - \frac{1}{\beta_{,}\gamma_{,}} + \frac{1}{\gamma_{,}\delta_{,}} \text{ etc.}$$

und allgemein

$$201. \quad \frac{\varrho}{\varrho_{,}} = \alpha + \frac{1}{\alpha_{,}\beta_{,}} - \frac{1}{\beta_{,}\gamma} + \frac{1}{\gamma_{,}\delta} - \ldots \pm \frac{1}{\pi_{,}\varrho_{,}}$$

folgt.

Man findet also auf diese Weise für x die Reihe $\alpha + \frac{1}{\alpha_{,}\beta_{,}} - \frac{1}{\beta_{,}\gamma} + \ldots$, welche sich dem wahren Werthe von x um so mehr nähert, je weiter man sie fortsetzt. Und ist man damit bis zu einem beliebigen Gliede $\pm\frac{1}{\pi_{,}\varrho_{,}}$ gegangen, so liegt die Abweichung des Werths der Reihe von dem Werthe von x zwischen den beiden Grenzen $\pm\frac{1}{\varrho_{,}\sigma_{,}}$ und $\pm\frac{1}{\varrho_{,}\Sigma_{,}}$ (§. 73.), und ist also nothwendig kleiner als $\frac{1}{\varrho_{,}^{2}}$.

76.

Noch ist zu bemerken, dass die Glieder der Reihe

$$\alpha + \frac{1}{\alpha_{,}\beta_{,}} - \frac{1}{\beta_{,}\gamma_{,}} \ldots$$

einzeln den Gliedern des Kettenbruchs

Näherung durch continuirliche

$$p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r \ldots}},$$

von welchem sie herkommen, entsprechen [*wie aus* (188.) *zu sehen*], so dass die Reihe um so stärker convergirt, je mehr dieses mit dem Bruche der Fall ist. Nun haben wir oben (§. 68.) gezeigt, wie sich die Convergenz des Bruches möglichst verstärken lässt. Man kann also jetzt auch für x eine so stark als möglich convergirende Reihe aufstellen.

Um also z. B. eine Reihe zu finden, die den Umfang eines Kreises, den Halbmesser gleich Eins gesetzt, so convergirend als möglich ausdrückt, nehme man den Kettenbruch dafür. Nachdem man denselben, so viel als möglich nach (§. 68.) vereinfacht hat, bringe man ihn auf die Form

$$202. \quad \pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{-294 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{-3 + \ldots}}}}} \quad (185.)$$

so dass $p = 3$, $q = 7$, $r = 16$, $s = -294$ *etc.* ist. Dieses giebt, zu Folge der Ausdrücke (188. §. 71.)

$$\alpha_{,} = 1,\ \beta_{,} = 7,\ \gamma_{,} = 7 \cdot 16 + 1 = 113$$
$$\delta_{,} = 113 \cdot -294 + 7 = -33215$$
$$\varepsilon_{,} = -33215 \cdot 3 + 113 = -99532$$
$$\zeta_{,} = -99532 \cdot -3 - 33215 = 265381 \text{ etc.},$$

also ist

Brüche.

$$203.\ \pi = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7 \cdot 113} - \frac{1}{113 \cdot 33215} - \frac{1}{33215 \cdot 99532}$$
$$- \frac{1}{99532 \cdot 265381} \ldots$$

[*Die Paragraphen von* (65.) *an bis hierher enthalten, wie man sieht, die sämmtlichen Grundzüge der Theorie der Kettenbrüche, mit der dem Verfasser eigenthümlichen Klarheit und Leichtigkeit.*]

Vierte Abtheilung.

Verschiedene Mittel, die Berechnung der Wurzeln der Gleichungen durch Kettenbrüche, zu erleichtern.

77.

Wir fanden im Allgemeinen in (§. 72.), dass, wenn $\frac{\pi}{\pi_{,}}$ und $\frac{\varrho}{\varrho_{,}}$ zwei auf einander folgende, gegen x convergirende Brüche sind,

$$x = \frac{\varrho t + \pi}{\varrho_{,} t + \pi_{,}}$$

ist (194.). Substituirt man diesen Ausdruck von x in die Gleichung mit x, deren Wurzel man sucht, so erhält man eine transformirte Gleichung mit t, welche nothwendig die nämliche ist, die man erhalten würde, wenn man $p + \frac{1}{y}$ statt x, $q + \frac{1}{z}$ statt y *etc.* setzte. Und um den folgenden Bruch $\frac{\sigma}{\sigma_{,}}$ zu

Näherung durch continuirliche

finden, muss man die der Grösse t am nächsten kommende ganze Zahl nehmen, welche, wenn man sie durch k bezeichnet,

$$\sigma = k\varrho + \pi \text{ und } \sigma_, = k\varrho_, + \pi_,$$

giebt. Kennt man also blos die ersten beiden Brüche $\frac{\alpha}{\alpha_,}$ und $\frac{\beta}{\beta_,}$, welche immer $\frac{1}{0}$ und $\frac{p}{1}$ sind (§. 71. 188.), so kann man, der Reihe nach, blos mit Hülfe der einen Gleichung in x alle übrige finden.

78.

Man mag nun aber die successive Substitution von $p + \frac{1}{y}$ statt x, $q + \frac{1}{z}$ statt y *etc.* ausführen, oder allgemein $\frac{\varrho t + \pi}{\varrho_, t + \pi_,}$ statt x setzen, so besteht die Schwierigkeit noch immer darin, in den transformirten Gleichungen die ganzen Zahlen zu finden, welche den positiven und negativen, über Eins hinaus liegenden Wurzeln, welche die Gleichungen nothwendig enthalten müssen, so nahe kommen als möglich (§. 70.). Entspricht der erste sich nähernde Werth p nur einer einzelnen Wurzel, so haben alle transformirte Gleichungen, in y, z *etc.* jede ebenfalls nur eine einzige Wurzel, die grösser ist als Eins, so dass man die den Wurzeln sich nähernden ganzen Zahlen blos durch Substitution der natürlichen Zahlen finden kann (§. 19.). Gehört aber das nämliche p zu mehreren verschiedenen Wurzeln, so haben auch die transformirten Gleichungen mehrere positive oder negative Wurzeln, die grösser sind als Eins, bis man auf eine

Gleichung

Gleichung kommt, die nur eine solche Wurzel hat. Denn alsdann haben alle folgende Gleichungen jede wiederum nur eine Wurzel, die grösser ist als Eins, wie wir solches in (§. 19.) zeigten.

Bis man auf diese letzte transformirte Gleichung kommt, kann öfters die blosse Substitution der natürlichen Zahlen nicht hinreichend seyn, um die sich nähernden ganzzahligen Werthe, deren man bedarf, zu finden, weil die Gleichungen Wurzeln haben können, welche von einander um weniger als Eins verschieden sind. In diesem Fall also scheint es, dass das allgemeine Verfahren des ersten Abschnitts angewandt werden müsse. Ist solches indessen mit dem ersten, x sich nähernden Werthe der ursprünglichen Gleichung geschehen, so kann man die fernere Rechnung bei den transformirten Gleichungen ersparen. Dieses wollen wir näher auseinandersetzen.

79.

Durch das erwähnte Verfahren findet man die Grenzen, zwischen welchen jede reelle Wurzel der gegebenen Gleichung enthalten ist, und zwar so, dass zwischen zwei Grenzen nur eine Wurzel liegt (§. 13.).

Die Grenzen der gesuchten Wurzel mögen λ und L seyn. Der Ausdruck $x = \frac{\varrho t + \pi}{\varrho_{,} t + \pi_{,}}$ (194.) giebt $t = \frac{\pi_{,} x - \pi}{\varrho - \varrho_{,} x}$, also ist der Werth von t zwischen den Grenzen $\frac{\pi_{,} \lambda - \pi}{\varrho - \varrho_{,} \lambda}$ und $\frac{\pi_{,} L - \pi}{\varrho - \varrho_{,} L}$ enthalten. Sind also diese letzten Grenzen um weniger als

Näherung durch continuirliche

die Einheit von einander verschieden, so erhält man den sich nähernden Werth von t auf der Stelle. Sind sie aber um Eins, oder mehr als Eins verschieden, so folgt daraus, dass die gesuchte Wurzel t von den übrigen Wurzeln der transformirten Gleichung in t um Eins oder mehr als Eins verschieden seyn muss, so dass man sicher ist, die sich der Wurzel nähernde ganze Zahl zu finden, wenn man die natürlichen Zahlen der Reihe nach an die Stelle von t setzt. Eben so verhält es sich um so mehr in den folgenden transformirten Gleichungen.

80.

Der Ausdruch

$$204. \quad t = \frac{\pi_{\prime} x - \pi}{\varrho - \varrho_{\prime} x}$$

kann auch gebraucht werden, eine beliebige Grösse x, welche zwischen bestimmten Grenzen liegt, durch einen Kettenbruch auszudrücken, wenigstens diejenigen Glieder des Bruchs zu finden, welche durch die Grenzen bestimmt werden. Denn bezeichnet man, wie oben, die beiden Grenzen von x durch λ und L, so sind $\frac{\pi_{\prime} \lambda - \pi}{\varrho - \varrho_{\prime} \lambda}$ und $\frac{\pi_{\prime} L - \pi}{\varrho - \varrho_{\prime} L}$ die Grenzen von t, so dass sich der ganzzahlige Theil des Werths von t g e n a u finden lässt, so lange die Differenz zwischen jenen beiden Grenzen nicht grösser als Eins ist. Nimmt man also $\frac{1}{0}$ und $\frac{p}{1}$ für die beiden ersten Brüche (p bedeutet den ganzzahligen Theil des Werths von x), so kann man die Reihe der conver-

genten Brüche fortsetzen, bis die Grenzen um mehr als Eins von einander abstehen; hier muss man stehen bleiben, weil die gegebenen Grenzen λ und L keine grössere Näherung von x zulassen.

Man hat keinen Irrthum zu fürchten, wenn man den Kettenbruch auch weiter fortsetzt als es seyn sollte, was leicht geschehen kann, wenn man sich, um diesen Bruch zu berechnen, blos einer der Zahlen λ und L bedient und so verfährt, als wenn man, nach Art der gewöhnlichen Reduction von Brüchen in Kettenbrüche, das gemeinschaftliche Maass der Zahlen λ und L finden wollte.

Um völlig sicher zu gehen, muss man gleichmässig mit beiden Zahlen λ und L operiren, und nur denjenigen Theil des Kettenbruchs beibehalten, welchen beide Operationen gemeinschaftlich geben. Aber das erste Verfahren ist bequemer und einfacher.

81.

Wir wollen noch andere Mittel zeigen, die Berechnung der ganzzahligen Theile der Wurzeln von den verschiedenen transformirten Gleichungen zu erleichtern.

Es sey

$$205.\quad t^n - at^{n-1} + bt^{n-2} \ldots = 0$$

irgend eine dieser Gleichungen, so dass es also darauf ankommt, den ganzzahligen Theil des Werthes von t zu finden, welchen wir durch k bezeichnen wollen. Da die Gleichung (205.) von der gegebenen Gleichung herkommt, so ist sie mit ihr von einerlei

Näherung durch continuirliche

Ordnung und hat mit ihr gleichviel Wurzeln, deren Zahl wir n setzen.

In (§. 79.) fanden wir allgemein

$$t = \frac{\pi_{,} x - \pi}{\varrho - \varrho_{,} x} \quad (204.),$$

welches sich auf

$$t = \frac{\pi_{,}}{\varrho_{,}} \cdot \frac{x - \frac{\pi}{\pi_{,}}}{\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - x} = \frac{\pi_{,}}{\varrho_{,}} \left(\frac{\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - \frac{\pi}{\pi_{,}}}{\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - x} - 1 \right)$$

bringen lässt [*wie leicht zu sehen*]. Nun ist $\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - \frac{\pi}{\pi_{,}} = \pm \frac{1}{\varrho_{,} \pi_{,}}$ (200.). Das obere Zeichen gilt, wenn die Zahl des Bruchs $\frac{\varrho}{\varrho_{,}}$ gerade, das untere, wenn dieselbe ungerade ist. Es ist also

$$206. \quad t = \pm \frac{1}{\varrho_{,}^2 \left(\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - x \right)} - \frac{\pi_{,}}{\varrho_{,}}.$$

Bezeichnet man also die gesuchte Wurzel durch x und die andern Wurzeln der Gleichung mit x, n an der Zahl, durch x_1, $x_2 \ldots$, hingegen durch t, t_1, $t_2 \ldots$ die correspondirenden Werthe von t, so erhält man

$$207. \left\{ \begin{aligned} t &= \pm \frac{1}{\varrho_{,}^2 \left(\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - x \right)} - \frac{\pi_{,}}{\varrho_{,}} \\ t_1 &= \pm \frac{1}{\varrho_{,}^2 \left(\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - x_1 \right)} - \frac{\pi_{,}}{\varrho_{,}} \\ t_2 &= \pm \frac{1}{\varrho_{,}^2 \left(\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - x_2 \right)} - \frac{\pi_{,}}{\varrho_{,}} \\ &\text{etc.} \end{aligned} \right.$$

Brüche.

Nun ist aber in der Gleichung (205.) mit t,

$$a = t + t_1 + t_2 \dots.$$

Substituirt man also die Werthe von $t, t_1, t_2 \dots$ (207.), deren Zahl $n - 1$ ist, so erhält man

$$208.\quad a = t - \frac{(n-1)\pi_{,}}{\varrho_{,}}$$
$$\pm \frac{1}{\varrho_{,}^2}\left(\frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - x_1} + \frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - x_2} + \frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - x_3} \dots\right).$$

Nun fanden wir in (§. 73.), dass

$$\frac{\varrho}{\varrho_{,}} = x \pm \frac{1}{\varrho_{,}(\varrho_{,}t + \pi_{,})}\ (196.),$$

oder, wenn man

$$209.\quad \varrho_{,}t + \pi_{,} = \Psi\varrho_{,}$$

setzt,

$$210.\quad \frac{\varrho}{\varrho_{,}} = x \pm \frac{1}{\Psi\varrho_{,}^2},$$

wo zu bemerken, dass, weil $\varrho_{,}t + \pi_{,}$ zwischen den Grenzen $\sigma_{,}$ und $\Sigma_{,}$ eingeschlossen ist, welche beide grösser als $\varrho_{,}$ sind (§. 72.), die Grösse Ψ nothwendig grösser als Eins seyn muss. Substituirt man daher (210.) in (208.), so erhält man

$$211.\quad t = a + \frac{(n-1)\pi_{,}}{\varrho_{,}}$$
$$\mp\left(\frac{1}{\varrho_{,}^2(x - x_1) \pm \frac{1}{\Psi}} + \frac{1}{\varrho_{,}^2(x - x_2) \pm \frac{1}{\Psi}} \dots\right).$$

Nun sind die Grössen $x - x_1$, $x - x_2$ *etc.* gegeben und die Grösse $\varrho_{,}$ wächst beständig; desgleichen ist der Bruch $\frac{1}{\Psi}$

Näherung durch continuirliche

immer kleiner als Eins. Daraus folgt, dass die Grössen

$$\frac{1}{\varrho_{,}^{2}(x-x_{1}) \pm \frac{1}{\psi}}, \quad \frac{1}{\varrho_{,}^{2}(x-x_{2}) \pm \frac{1}{\psi}} \quad etc.$$

immerfort abnehmen, und dass folglich die Summe dieser Grössen, deren Zahl $n-1$ ist, ebenfalls immerfort abnimmt, so dass sie zuletzt nothwendig kleiner als $\frac{1}{2}$ wird. [*Da nämlich diese Summe immer kleiner wird, je mehr* $\varrho_{,}$ *zunimmt, so muss sie zuletzt kleiner werden können als* $\frac{1}{2}$.]

Man muss also nothwendig auf eine transformirte Gleichung kommen, deren Wurzel t, bis auf $\frac{1}{2}$, gleich $a+\frac{(n-1)\pi_{,}}{\varrho_{,}}$ ist (wo a den Coefficienten des zweiten Gliedes in (205.) negativ genommen, bedeutet). Diese Wurzel t muss also nothwendig zwischen den Grenzen

212. $a+\frac{(n-1)\pi_{,}}{\varrho_{,}}+\frac{1}{2}$ und $a+\frac{(n-1)\pi_{,}}{\varrho_{,}}-\frac{1}{2}$

liegen, und das nämliche gilt um so mehr für alle folgende transformirte Gleichungen.

Sobald man also auf eine solche transformirte Gleichung gekommen ist, darf man nur den ganzzahligen Theil von $a+\frac{(n-1)\pi_{,}}{\varrho_{,}}$ nehmen, das heisst die ganze Zahl, welche zwischen

$$a+\frac{(n-1)\pi_{,}}{\varrho_{,}}+\frac{1}{2} \text{ und } a+\frac{(n-1)\pi_{,}}{\varrho_{,}}-\frac{1}{2}$$

liegt. Diese Zahl muss nothwendig eine von den beiden auf einander folgenden ganzen Zahlen seyn,

zwischen welchen der genaue Werth von t liegt, so dass dieselbe mit völliger Sicherheit für k in (§. 77.) genommen werden kann.

So also kann man die Näherung, so weit man will, ohne das mindeste Suchen (tâtonnement) fortsetzen.

82.

Da

$$a = t + t_1 + t_2 \ldots,$$

so erhält man, wenn man die Werthe (207.) von t, t_1, $t_2 \ldots$ aus (§. 81.) substituirt,

213. $a =$

$$\pm \frac{1}{\varrho_{,}^{2}}\left(\frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - x} + \frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - x_1} + \frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - x_2} \ldots\right) - \frac{n\pi}{\varrho_{,}}.$$

Nun sey

214. $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - \ldots = 0$

die gegebene Gleichung. Man setze den ersten Theil dieser Gleichung [*also*

215. $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots] = X$,

so ist aus der Theorie der Gleichungen leicht zu sehen, dass, wenn man, nach der Differentiation, $\frac{\varrho}{\varrho_{,}}$ statt x setzt,

216. $$\frac{dX}{Xdx} = \frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - x} + \frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - x_1} + \frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - x_2} \ldots$$

ist, weil x, x_1, $x_2 \ldots$ die verschiedenen Wurzeln der Gleichung $X = 0$ sind. [*Da nämlich* $X =$

Näherung durch continuirliche

$(x-x)(x-x_1)(x-x_2)\ldots$, so erhält man, wenn man differentiirt,

$$\frac{dX}{dx} = (x-x_1)(x-x_2)\ldots + (x-x_1)(x-x_2)\ldots + (x-x)(x-x_1)\ldots,$$

welches, durch $X = (x-x)(x-x_1)(x-x_2)\ldots$ dividirt,

$$\frac{dX}{Xdx} = \frac{1}{x-x} + \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2}\ldots,$$

und, wenn man $\frac{\varrho}{\varrho_{,}}$ statt x setzt, den Ausdruck (216.) giebt.]

Man erhält also [vermöge (213.)]

$$217.\quad a = \pm \frac{dX}{\varrho_{,}^2 Xdx} - \frac{n\pi_{,}}{\varrho_{,}}.$$

Mithin ist die Grösse

$$218.\quad a + \frac{(n-1)\pi_{,}}{\varrho_{,}} = \pm \frac{dX}{\varrho_{,}^2 Xdx} - \frac{\pi_{,}}{\varrho_{,}}.$$

Setzt man also [$\frac{dX}{\varrho_{,} Xdx}$, welches, wenn man (214.) differentiirt, $\frac{nx^{n-1}-(n-1)Ax^{n-2}+(n-2)Bx^{n-3}\ldots}{\varrho_{,}(x^n-Ax^{n-1}+Bx^{n-2}\ldots)}$,

und, wenn man $\frac{\varrho}{\varrho_{,}}$ statt x setzt,

$$\frac{n\frac{\varrho^{n-1}}{\varrho_{,}^{n-1}}-(n-1)A\frac{\varrho^{n-2}}{\varrho_{,}^{n-2}}+(n-2)B\frac{\varrho^{n-3}}{\varrho_{,}^{n-3}}\ldots}{\varrho_{,}\left(\frac{\varrho^n}{\varrho_{,}^n}-A\frac{\varrho^{n-1}}{\varrho_{,}^{n-1}}+B\frac{\varrho^{n-2}}{\varrho_{,}^{n-2}}\ldots\right)}, \text{ oder}$$

$$\frac{n\varrho^{n-1}-(n-1)A\varrho^{n-2}\varrho_{,}+(n-2)B\varrho^{n-3}\varrho_{,}^2\ldots}{\varrho^n-A\varrho^{n-1}\varrho_{,}+B\varrho^{n-2}\varrho_{,}^2\ldots}$$

Brüche.

giebt, diese Grösse also]

$$219. \quad \frac{dX}{\varrho_{,} X dx} = \frac{n\varrho^{n-1} - (n-1)A\varrho^{n-2}\varrho_{,} + (n-2)B\varrho^{n-3}\varrho_{,}^{2} \ldots}{\varrho^{n} - A\varrho^{n-1}\varrho_{,} + B\varrho^{n-2}\varrho_{,}^{2} \ldots} = R,$$

so ist [*in* (218.)] die Grösse

$$220. \quad a + \frac{(n-1)\pi_{,}}{\varrho_{,}} = \pm \frac{R - \pi_{,}}{\varrho_{,}};$$

also sind die beiden Grenzen (212. §. 81.) folgende:

$$221. \quad \frac{\pm R - \pi_{,}}{\varrho_{,}} + \tfrac{1}{2} \text{ und } \frac{\pm R - \pi_{,}}{\varrho_{,}} - \tfrac{1}{2}.$$

Man kann also diese Grenzen, unabhängig von der transformirten Gleichung mit t, blos aus der gegebenen Gleichung mit x finden; welches dienen kann, die Rechnung abzukürzen.

83.

Es bleibt nun noch übrig zu untersuchen, wie sich erkennen lasse, ob die Wurzel t zwischen jenen Grenzen eingeschlossen ist. Dieses ist leicht, sobald man die zwei auf einander folgenden ganzen Zahlen τ und $\tau + 1$ kennt, zwischen welchen die Wurzel liegt. Denn wenn $\lambda + \frac{1}{2}$ und $\lambda - \frac{1}{2}$ die beiden gegebenen Grenzen sind, so ist klar, dass, wenn t zwischen denselben liegen soll, λ zwischen die nämlichen Zahlen τ und $\tau + 1$ fallen muss und selbst näher an diejenige von diesen beiden Zahlen, welcher sich t am meisten nähert.

Man darf also nur

Erstlich, untersuchen, ob λ zwischen τ und $\tau+1$ fällt.

Zweitens, wenn dieses der Fall ist, so muss man für den sich nähernden Werth von λ von den beiden Zahlen diejenige nehmen, welcher t am nächsten liegt. Bezeichnet man diese Zahl durch k und setzt $t = k + \frac{1}{w}$, so wird man sehen, ob die transformirte Gleichung in w eine positive oder negative Wurzel hat, die grösser ist als 2. Ist das Letztere der Fall, so ist man sicher, dass die Wurzel t zwischen den Grenzen $\lambda + \frac{1}{2}$ und $\lambda - \frac{1}{2}$ fällt und man kann dann die Rechnung nach (§. 81.) fortsetzen.

84.

Man kann, um zu sehen, ob die Wurzel t zwischen die Grenzen $\lambda + \frac{1}{2}$ und $\lambda - \frac{1}{2}$ fällt, auch wie folgt verfahren. Die ganze Schwierigkeit besteht nämlich, wie aus (§. 81.) folgt, darin, zu sehen, ob die Summe der Grössen $\frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho_{,}}-x_1}$, $\frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho_{,}}-x_2}$ *etc.*, durch $\varrho_{,}^2$ dividirt, kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Es kommt also darauf an, eine Grösse zu suchen, welche grösser als diese Summe ist, und dann zu untersuchen, ob diese Grösse kleiner sey als $\frac{\varrho_{,}^2}{2}$.

Die reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung, deren Zahl μ seyn mag, sollen x, x_1, x_2 seyn, die imaginairen Wurzeln, deren Zahl 2ν seyn mag,

Brüche.

$$\zeta + \Psi \sqrt{-1},\quad \zeta - \Psi \sqrt{-1}$$
$$\zeta_, + \Psi \sqrt{-1},\quad \zeta_, - \Psi \sqrt{-1}$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

so dass also

$$\mu + 2\nu = n$$

ist. Da der Bruch $\frac{\varrho}{\varrho_,}$ von der Wurzel x um weniger als $\pm \frac{1}{\varrho_,^2}$ verschieden ist (§. 73.), so ist klar, dass, wenn man durch Δ eine Grösse bezeichnet, welche kleiner ist als die kleinste der Differenzen zwischen den reellen Wurzeln der Gleichung, oder der kleinsten Differenz gleich, dass dann alle die reellen Grössen

$$\frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho_,} - x_1},\ \frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho_,} - x_2}\ \text{etc.}$$

nothwendig kleiner als $\frac{1}{\Delta \pm \frac{1}{\varrho_,^2}}$ seyn müssen, und dass folglich die Summe dieser Grössen, deren Zahl $\mu - 1$ ist, kleiner seyn muss als

$$\frac{n-1}{\Delta \pm \frac{1}{\varrho_,^2}}.$$

[*Es ist z. B.* $\frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho_,} - x_1} = \frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho_,} - x + (x - x_1)}$. *Nun ist* $\frac{\varrho}{\varrho_,} - x > \mp \frac{1}{\varrho_,^2}$ (196.) *und* $x - x_1$ *z. B. soll grösser seyn als* Δ. *Hieraus folgt, dass* $\frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho_,} - x_1}$

Näherung durch continuirliche

oder $\frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - x + (x - x_{1})}$ *kleiner ist als* $\frac{1}{\Delta \pm \frac{1}{\varrho_{,}^{2}}}$.]

Die unmöglichen Wurzeln geben, Paarweise genommen, die Grössen

$$\frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - \zeta - \Psi\sqrt{-1}}, \quad \frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - \zeta + \Psi\sqrt{-1}},$$

so dass man [*weil z. B.* $\frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - \zeta - \Psi\sqrt{-1}} +$

$$\frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - \zeta + \Psi\sqrt{-1}} = \frac{\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - \zeta + \Psi\sqrt{-1} + \frac{\varrho}{\varrho_{,}} - \zeta - \Psi\sqrt{-1}}{\left(\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - \zeta\right)^{2} + \Psi^{2}}$$

$= \frac{2\left(\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - \zeta\right)}{\left(\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - \zeta\right)^{2} + \Psi^{2}}$ *ist*] ν Grössen von der Form

$$\frac{2\left(\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - \zeta\right)}{\left(\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - \zeta\right)^{2} + \Psi^{2}}$$

hat. Nun ist die Grösse $\frac{2\left(\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - \zeta\right)}{\left(\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - \zeta\right)^{2} + \Psi^{2}}$, was auch die Grössen $\frac{\varrho}{\varrho_{,}}$, ζ und Ψ seyn mögen, immer kleiner als $\frac{1}{\Psi}$; denn man setze, was immer angeht,

$$\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - \zeta = \Psi \tang \varphi,$$

Brüche.

so ist

222. $$\frac{2\left(\frac{\varrho}{\varrho_{,}}-\zeta\right)}{\left(\frac{\varrho}{\varrho_{,}}-\zeta\right)^2+\Psi^2}\left[=\frac{2\,\Psi\,tang\,\varphi}{\Psi^2\,tang\,\varphi^2+\Psi^2}=\right.$$

$$\left.\frac{2\,tang\,\varphi}{\Psi\,sec\,\varphi^2}=\frac{2\,sin\,\varphi}{\Psi cos\,\varphi\,\frac{1}{cos\,\varphi^2}}\right]=\frac{2\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi}{\Psi}=\frac{sin\,2\varphi}{\Psi},$$

welches immer kleiner ist als $\frac{1}{\Psi}$, weil $sin\,2\varphi$ immer kleiner als 1 ist. [*Der Satz findet nicht allgemein, sondern nur dann Statt, wenn* Ψ *positiv ist; denn ist z. B.* $\frac{\varrho}{\varrho_{,}}-\zeta$ *positiv und* Ψ *negativ, so ist offenbar* $\frac{2\left(\frac{\varrho}{\varrho_{,}}-\zeta\right)}{\left(\frac{\varrho}{\varrho_{,}}-\zeta\right)^2+\Psi^2}$ *grösser, und nicht kleiner als* $\frac{1}{\Psi}$, *weil die erste Grösse dann gänzlich positiv,* $\frac{1}{\Psi}$ *dagegen negativ ist. Auch ist wirklich* $\frac{sin\,2\varphi}{\Psi}$ *nur dann kleiner als* $\frac{1}{\Psi}$, *wenn* Ψ *positiv ist. Denn es sey z. B.* $\Psi=-1$ *und* $sin\,2\varphi=\frac{1}{3}$, *so ist nicht* $-\frac{1}{3}<-1$, *sondern nur, wenn* $\Psi=+1$, *ist* $+\frac{1}{3}<+1$.] Bezeichnet man also eine Grösse, die kleiner ist als die kleinste der Grössen Ψ, Ψ_{1}, oder der kleinsten unter diesen Grössen gleich, durch Π, so wird die Grösse $\frac{v}{\Pi}$ nothwendig grösser seyn, als die Summe der imaginairen Grössen

$$\frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho_{,}}-\zeta-\Psi\sqrt{-1}},\ \frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho_{,}}-\zeta+\Psi\sqrt{-1}},\ \frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho_{,}}-\zeta-\Psi_{1}\sqrt{-1}}$$

etc.

Näherung durch continuirliche

Zusammen also wird die Grosse

$$\frac{\mu - 1}{\Delta \pm \frac{1}{\varrho_{,}^{2}}} + \frac{\nu}{\Pi}$$

grösser seyn, als die Summe aller der Grössen

$$\frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - x_1}, \frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho_{,}} - x_2} \ldots$$

Ist also

$$223. \quad \frac{\mu - 1}{\varrho_{,}^{2} \Delta - 1} + \frac{\nu}{\varrho_{,}^{2} \Pi} = \text{oder} < \tfrac{1}{2},$$

so ist man sicher, dass die Wurzel t zwischen die gegebenen Grenzen fällt.

Um aber die Zahlen Δ und Π zu finden, wenn man im voraus die Wurzeln der gegebenen Gleichung nicht kennt, darf man nur in der Differenzen-Gleichung (§. 8.) die **Grenze** l der positiven Wurzeln und die **Grenze** $-h$ der negativen Wurzeln suchen, so kann man für Δ irgend eine Zahl annehmen, die kleiner als $\frac{1}{\sqrt{l}}$ oder gleich $\frac{1}{\sqrt{l}}$ ist, und für Π irgend eine Zahl, die kleiner als $\frac{2}{\sqrt{h}}$ oder gleich $\frac{2}{\sqrt{h}}$ ist. Dieses folgt offenbar aus dem, was in (§. 8.) bewiesen. [*Hier wäre wieder einige Erläuterung zu wünschen gewesen.*]

85.

Wenn $\frac{\mu - 1}{\Delta - 1} + \frac{\nu}{\Pi} < \frac{1}{2}$ wäre, so fände die verlangte Bedingung vom Anfange der Reihe ab Statt,

Brüche.

so dass man sich dem Werthe von x ohne alles Suchen nähern könnte. Die Rechnung wäre alsdann folgende.

Nachdem die erste Näherung an x gefunden, welche man nach Belieben grösser oder kleiner als x annehmen kann, so hat man, wenn man den gefundenen Werth p nennt, die beiden ersten Brüche $\frac{1}{0}$ und $\frac{p}{1}$.

Man setze also

Erstlich $\pi = 1$, $\pi_{,} = 0$, $\varrho = p$, $\varrho_{,} = 1$, und diese Werthe in den Ausdruck für R (219. §. 82.). Darauf nehme man die ganze Zahl, welche $\frac{-R-\pi_{,}}{\varrho_{,}}$, das heisst hier $-R$, am nächsten kommt, und nenne dieselbe k, so erhält man den Bruch

$$\frac{k\varrho + \pi}{k\varrho_{,} + \pi_{,}} = \frac{k\varrho + 1}{k}$$

Zweitens setze man $\pi = p$, $\pi_{,} = 1$, $\varrho = kp + 1$, $\varrho_{,} = k$, substituire alles dieses in R (219.) und nehme die ganze Zahl, welche $\frac{R-\pi_{,}}{\varrho_{,}}$, das heisst hier $\frac{R-1}{k}$ am nächsten kommt. Ist diese Zahl $k_{,}$, so erhält man den Bruch

$$\frac{k_{,}\varrho + \pi}{k_{,}\varrho_{,} + \pi_{,}} = \frac{k_{,}(kp + 1) + p}{k_{,}k + 1}.$$

Drittens setze man $\pi = kp + 1$, $\pi_{,} = k_{,}$, $\varrho = k_{,}(kp + 1) + p$, $\varrho_{,} = k_{,}k + 1$, und nehme die ganze Zahl, welche $\frac{-R-\pi_{,}}{\varrho_{,}}$, oder $\frac{-R-k_{,}}{kk_{,}+1}$ am näch-

Näherung durch continuirliche

sten kommt. Heisst dieselbe k_2, so erhält man den Bruch

$$\frac{k_2 \varrho + \pi}{k_2 \varrho_, + \pi_,}$$

u. s. w.

Auf diese Weise erhält man den Werth von x durch den Kettenbruch

$$224. \quad p + \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 \ldots}}},$$

oder durch die convergenten Brüche

$$225. \quad \frac{1}{0}, \frac{p}{1}, \frac{kp+1}{k}, \frac{k_,(kp+1)+p}{k_, k+1} \text{ etc.}$$

ausgedrückt.

86.

Wenn nicht sogleich $\frac{\mu - 1}{\Pi - 1} + \frac{V}{\Pi} < \frac{1}{2}$ ist, so darf man nur den Kettenbruch auf die gewöhnliche Weise suchen, bis man auf einen Bruch kommt, für dessen Nenner $\varrho_,$, $\frac{\mu - 1}{\varrho_,^2(\Pi - 1)} + \frac{v}{\varrho_,^2 \Pi} < \frac{1}{2}$ ist, das heisst, bis man auf eine transformirte Gleichung kommt, die den Bedingungen des 83sten Paragraphs entspricht.

Da übrigens, wenn man alle Wurzeln einer Gleichung vergrössert, auch in demselben Verhältniss die Differenzen zwischen denselben zunehmen, so ist klar, dass, wenn man in der gegebenen Gleichung z. B. $\frac{x}{g}$ statt x setzt, welches die Wurzeln in dem Verhältniss $1 : g$ grösser

grösser macht, dass dann auch die der neuen Gleichung entsprechenden Zahlen Δ und Π in demselben Verhältniss grösser werden und folglich die Werthe $g\Delta$ und $g\Pi$ annehmen. Man kann also auch die Bedingung von (§. 85.) dadurch erfüllen, dass man g einen Werth giebt, für welchen

$$226. \quad \frac{\mu - 1}{g\Delta - 1} + \frac{\nu}{g\Pi} = \text{oder} < \tfrac{1}{2}$$

ist.

Alsdann kann man sich des Verfahrens von (§. 85.) bedienen, um sich dem Werthe von x ohne alles Suchen zu nähern. Man muss blos den gefundenen Werth durch g dividiren, um die wirkliche Wurzel der gegebenen Gleichung zu finden. Man findet zwar auf diese Weise nicht mehr die Wurzel durch einen einfachen Kettenbruch, kann sich aber derselben doch so weit nähern als man will, welches gewöhnlich hinreichend ist.

87.

Es sey z. B. die Gleichung

$$227. \quad x^n - A = 0$$

gegeben, so dass also die nte Wurzel der Zahl A verlangt wird.

Es sey

Erstlich n eine gerade Zahl und

$$n = 2m,$$

so hat die gegebene Gleichung, wie bekannt, zwei reelle Wurzeln, $+\sqrt[n]{A}$ und $-\sqrt[n]{A}$ [*in so fern A*

Näherung durch continuirliche

positiv ist], und $n-2$ unmögliche Wurzeln, welche sich durch

$$228.\quad \left(\cos\frac{sc}{n} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{sc}{n}\right)\sqrt[n]{A}$$

ausdrücken lassen, wo c den ganzen Umfang oder vier rechte Winkel bedeutet, und für s der Reihe nach 1, 2, 3 *etc.* bis zu $m-1$ gesetzt wird, [*auch weiter als* $m-1$; *so weit man will, weil über* $m-1$ *die nämlichen Wurzeln wiederkehren. Man findet eine vollständige Untersuchung dieses Gegenstandes in der Abhandlung des Uebersetzers über Potenzen, Facultäten und Winkel-Functionen, Berlin bei Reimer* 1823, *im dritten Abschnitte dieses Buchs.*] Es ist also in diesem Falle, zu Folge (84.)

$$\mu = 2,\quad r = m-1$$

und man kann

$$229.\quad \Delta = 2\sqrt[n]{A},\quad \Pi = \sin\frac{c}{n}.\sqrt[n]{A}$$

setzen, weil $\sin\frac{c}{n}$ der kleinste unter allen den Sinus, $\sin\frac{sc}{n}$ ist.

Die Bedingung von (§. 85.) wird also erfüllt, wenn

$$230.\quad \frac{1}{2\sqrt[n]{A}-1} + \frac{m-1}{\sin\frac{c}{n}.\sqrt[n]{A}} = \text{oder} < \tfrac{1}{2}$$

ist. Sie wird also allemal gewiss erfüllt, wenn

$$231.\quad A = \text{oder} > \left(\frac{n}{\sin\frac{c}{n}}\right)^n$$

ist.

Brüche.

[$A = \left(\frac{n}{\sin\frac{c}{n}}\right)^n$, *in* (200.) *gesetzt, würde geben:*

$$\frac{1}{2\frac{n}{\sin\frac{c}{n}} - 1} + \frac{m-1}{n} = \frac{\sin\frac{c}{n}}{2n - \frac{c}{n}} + \frac{m-1}{n}$$

$$= \frac{\sin\frac{c}{n}}{2n - \sin\frac{c}{n}} + \tfrac{1}{2} - \frac{1}{n} \text{ (weil } m = \tfrac{1}{2}n),$$

welches immer kleiner als $\frac{1}{2}$ *ist, weil* $\sin\frac{c}{n} < 1$ *und*

$2n - \sin\frac{c}{n} > n$, *also* $\frac{\sin\frac{c}{n}}{2n - \sin\frac{c}{n}} < \frac{1}{n}$ *ist.*]

Zweitens. Es sey n ungerade und

$$n = 2m + 1,$$

so hat die gegebene Gleichung nur eine reelle Wurzel, $\sqrt[n]{A}$, und $2m$ unmögliche Wurzeln von der Form

$$232. \quad \left(\cos\frac{sc}{n} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{sc}{n}\right)\sqrt[n]{A},$$

wenn der Reihe nach $s = 1, 2, 3$ *etc.* bis m gesetzt wird. Es ist also in diesem Falle

$$\mu = 1, \quad \nu = m,$$

und weil der kleinste unter den Sinus, $\sin\frac{sc}{n}$, wegen $n = 2m + 1$, $\sin\frac{180°}{n}$ ist, so kann man

$$233. \quad \Pi = \sin\frac{180°}{n}.\sqrt[n]{A}$$

Näherung durch continuirliche

setzen, [*man müsste also s auch* $=\frac{1}{2}$ *setzen können,*] so dass die Bedingung von (§. 84.) hier Statt hat, wenn $\frac{m}{\sin\frac{180^\circ}{n}.\sqrt[n]{A}}$ = oder $<\frac{1}{2}$, das heisst, wenn

$$234.\quad A = \text{oder} > \left(\frac{n-1}{\sin\frac{180^\circ}{n}}\right)^n$$

ist.

Ist also die Zahl A nicht kleiner, so kann man durch das Verfahren von (§. 85.), ohne Versuche, die nte Wurzel der Zahl A finden. Ist A kleiner, so kann man dieselbe durch Multiplication mit irgend einer Zahl, die eine genaue nte Wurzel hat, vergrössern. Um alsdann die gesuchte Wurzel von A zu finden, darf man das Resultat nur wieder mit dem Multiplicator dividiren.

Der Werth von R (§. 83.) ist für die Gleichung $x^n - A = 0$,

$$235.\quad R = \frac{n\varrho^{n-1}}{\varrho^n - A\varrho_{,}^{n}}.$$

88.

Da der Fall $n = 2$ durch das Verfahren in der zweiten Abtheilung aufgelöset werden kann, so abstrahiren wir von demselben. Es ist, wenn

1. $n = 4$, $\sin\frac{360^\circ}{4} = 1$, also $A =$ oder $> 4^4$;

2. $n = 6$, $\sin\frac{360^\circ}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, also $A =$ oder $> 3^3.4^6$;

3. $n = 8$, $\sin\frac{360^\circ}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, also $A =$ oder $> 2^4.4^8$

u. s. w.

Brüche.

Eben so ist, wenn

1. $n = 3$, $\sin \frac{360°}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, also $A =$ oder $> \frac{4^3}{3\sqrt{3}}$;

2. wenn $n = 5$, so hat man $\sin \frac{360°}{5}$, und wenn man die Rechnung mit Logarithmen macht, so erhält man $A =$ oder > 1315 u. s. w.

89.

Gesetzt, man verlangte die dritte Wurzel von 17, so kann man sich, weil $17 > \frac{4^3}{3\sqrt{3}}$ oder $3\sqrt{3} > 4$ ist, des Verfahrens von (§. 85.) bedienen. Man erhält also, weil $n = 3$ und $A = 17$ (§. 87.), $R = \frac{3\varrho^2}{\varrho^3 - 17\varrho_{,}^3}$. Nun sind die ganzen Zahlen, welche $\sqrt[3]{17}$ am nächsten kommen, 2 und 3. Man kann also nach Belieben p entweder gleich 2 oder gleich 3 setzen.

Es sey $p = 2$, so erhält man, weil die ersten Brüche $\frac{1}{0}$ und $\frac{2}{1}$ sind,

Erstlich $\pi = 1$, $\pi_{,} = 0$, $\varrho = 2$, $\varrho_{,} = 1$, also $R = \frac{3 \cdot 4}{8 - 17} = -\frac{4}{3}$, und die ganze Zahl, welche $\frac{-R - \pi_{,}}{\varrho_{,}} = \frac{4}{3}$ am nächsten kommt, ist 1, also ist $k_{,} = 1$, welches den Bruch $\frac{k_{,}p + 1}{k_{,}} = \frac{3}{1}$ giebt.

Zweitens, $\pi = 2$, $\pi_{,} = 1$, $\varrho = 3$, $\varrho_{,} = 1$, also $R = \frac{2 \cdot 9}{10}$ und $\frac{R - \pi_{,}}{\varrho_{,}} = \frac{17}{10}$. Die ganze Zahl welche $\frac{17}{10}$ am nächsten kommt, ist 2, also kann man

Näherung durch continuirl. Brüche.

$k_{,} = 2$ setzen, welches den Bruch $\frac{k_{,}\varrho + \pi}{k_{,}\varrho_{,} + \pi_{,}} = \frac{8}{3}$ giebt.

Drittens $\pi = 2$, $\pi_{,} = 1$, $\varrho = 8$, $\varrho_{,} = 3$, also

$$R = \frac{3 \cdot 8^2}{8^3 - 17 \cdot 3^3} = \frac{192}{53} \text{ und } \frac{-R - \pi_{,}}{\varrho_{,}} = -\frac{245}{159}.$$

Die ganze Zahl, welche diesem Bruche am nächsten kommt, ist -2, also ist $k_{,} = -2$, und der Bruch $\frac{k_2 \varrho + \pi}{k_2 \varrho_{,} + \pi_{,}}$ ist $\frac{-13}{-5}$ u. s. w.

Auf diese Weise erhält man folgende, der Zahl $\sqrt[3]{17}$ sich nähernde Brüche:

$$\frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{8}{3}, \frac{-13}{-5} \textit{ etc.}$$

und der Kettenbruch für $\sqrt[3]{17}$ ist

$$2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{-2 \ldots}}}$$

Zusätze

zur

Theorie der algebraischen Gleichungen.

Erster Zusatz.

Ueber den Beweis des ersten Lehrsatzes [§. 1.].

90.

Die beiden Lehrsätze des ersten Abschnitts machen die Grundlage der gesammten Theorie der Gleichungen aus. Man muss also dieselben strenge und so beweisen, dass dabei nirgend Etwas aus der Theorie der Gleichungen selbst entlehnt wird. Der Beweis des ersten Lehrsatzes im ersten Paragraph beruht auf Zerlegung der Gleichungen in Factoren, und kann also in Betracht der unmöglichen Factoren noch Zweifel zulassen. Zwar weiss man, wenn man den Satz von der Form der unmöglichen Wurzeln als bekannt annimmt, dass das Product zweier unmöglicher correspondirender Factoren immer nothwendig eine positive Grösse ist, was auch x seyn mag; woraus folgt, dass die Zeichenwechsel der Resultate der Substitutionen von p und q statt x nur von den reellen Wurzeln herrühren können. Der strenge Beweis dieses Satzes hängt indessen von dem zu beweisenden Lehrsatze selbst ab, so dass er auf diesen nicht anwendbar ist. Wir wollen, um diese Schwierigkeit zu heben, den Lehr-

Ueber den Beweis des

satz aus der Natur der Gleichungen selbst, unabhängig von ihren Eigenschaften, zu beweisen suchen.

91.

Man bezeichne die gegebene Gleichung, im Allgemeinen, durch

$$236. \quad P - Q = 0,$$

wo P die Summe der Glieder bedeutet, welche das Zeichen $+$ haben, Q die Summe der Glieder mit dem Zeichen $-$. Zunächst mögen p und q positive Zahlen seyn und q mag grösser seyn als p. Ist für $x = p$, $P - Q < 0$, und für $x = q$, $P - Q > 0$, so ist im ersten Falle $P < Q$, im andern Falle $P > Q$. Nun aber ist klar, dass die Grössen P und Q, weil sie nur positive Glieder sind und nur ganze und positive Potenzen von x enthalten, nothwendig zunehmen, wenn x zunimmt. Lässt man also x von p bis q stetig (par tous les degrés insensibles) wachsen, so werden auch P und Q stetig zunehmen, P aber wird nothwendig stärker zunehmen als Q, weil es Anfangs kleiner war als Q und hernach grösser seyn soll als Q. Es muss also zwischen dem Werthe p und q von x nothwendig irgend einen Werth von x geben, für welchen $P = Q$ ist, eben auf die Weise wie zwei bewegte Körper, die in dem nämlichen Augenblicke aus zwei verschiedenen Orten ihre Bewegung anfangen und in einerlei Richtung einerlei Linie durchlaufen, unterweges nothwendig zusammentreffen müssen, wenn derjenige von den beiden Körpern, welcher im Anfange hinter dem andern sich befand, am Ende

ersten Lehrsatzes.

diesem vorausgeeilt ist. Dieser Werth von x, für welchen $P = Q$, ist also offenbar eine von den Wurzeln der Gleichung und muss nothwendig zwischen p und q fallen. Eben so, wenn für $x = p$, $P - Q > 0$, und für $x = q$, $P - Q < 0$ wäre, so wäre im ersten Falle $Q < P$, im andern Falle $Q > P$. Lässt man also x von p bis q wachsen, so wächst Q stärker als P, und für irgend eine Grösse zwischen p und q ist $Q = P$.

Wären p und q, oder eine von diesen beiden Grössen, negativ, so nehme man eine positive Zahl r an, so gross, dass $r + p$ und $r + q$ positiv sind, so darf man nur in die gegebene Gleichung $y - r$ statt x setzen, um eine transformirte Gleichung in y zu haben, deren Resultate nach der Voraussetzung verschiedene Zeichen haben, wenn man $r + p$ und $r + q$ statt y setzt, weil diese Resultate die nämlichen sind, welche man erhält, wenn man in die gegebene Gleichung p und q statt x setzt. Nun sind aber die Zahlen $r + p$ und $r + q$ positiv, also findet auf die Gleichung mit y der obige Beweis Anwendung, und es lässt sich, wie oben, zeigen, dass die Gleichung mit y nothwendig eine Wurzel hat, die zwischen $r + p$ und $r + q$ liegt, und da $x = y - r$, so hat die Gleichung mit x nothwendig eine Wurzel zwischen p und q.

[*Hieraus folgt, dass, wenn in einer Gleichung wie*

$$P - Q = x^m + \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} \dots + \mu = 0$$

die Grösse $P - Q$ *für* $x = p$ *und* $x = q$, *wo* p

und q reelle Grössen sind, entgegengesetzte Zeichen hat, jedesmal eine reelle Wurzel der Gleichung zwischen p und q liegen muss. Es frägt sich nun, ob der Zeichenwechsel nur für reelle Grössen Statt findet, oder, wie es sich verhält, wenn p und q etwa beide imaginair sind, oder wenn eine von diesen Grössen eine unmögliche Grösse ist, und was dann vielleicht aus dem Zeichenwechsel der reellen Theile der Resultate folge.]

Zweiter Zusatz.

Ueber den Beweis des zweiten Lehrsatzes [§. 5.].

92.

Zu dem Beweise des Lehrsatzes (§. 5.) sind die beiden Sätze nöthig, dass jede Gleichung in so viele einfache reelle Factoren zerlegt werden kann, als sie reelle Wurzeln hat, und, dass der übrig bleibende Factor, wenn die Zahl der reellen Wurzeln kleiner ist als die Zahl der Einheiten in der Ordnungs-Zahl, die Grösse niemals negativ werden kann, was auch x seyn mag.

Den ersten Satz haben die Analysten als Resultat der Bildung der Gleichungen seit lange zugegeben. D'Alembert hat meines Wissens zuerst gezeigt, dass es nöthig ist, den Satz zu beweisen. Den zweiten Satz könnte man als eine Folge des ersten betrachten. Um aber keine Lücke zu lassen, ist es besser, jeden Satz besonders zu beweisen.

93.

Wir wollen durch $(x^m \ldots.)$ ein beliebiges Polynom mit x vom mten Grade bezeichnen, so dass

Ueber den Beweis des

237. $(x^m \ldots\ldots) = x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} \ldots\ldots \pm U.$
Setzt man hierin a statt x, so geht die Grösse $(x^m \ldots\ldots)$ in $(a^m \ldots\ldots)$ über, und es ist leicht, zu sehen, dass die Differenz $(x^m \ldots\ldots) - (a^m \ldots\ldots)$ dieser beiden ähnlichen Polynome durch $x - a$ theilbar seyn muss, denn jedes Glied des Polynoms $(x^m \ldots\ldots)$ wie Nx^n giebt in der Differenz ein Glied wie $N(x^n - a^n)$, und so lange n eine ganze positive Zahl ist, ist allgemein

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} \ldots\ldots + a^{n-1}).$$

Nimmt man also alle diese Quotienten zusammen und ordnet sie nach den Potenzen von x, so erhält man

238. $(x^m \ldots\ldots) - (a^m \ldots\ldots) = (x-a)(x^{m-1} \ldots\ldots),$

wo $(x^{m-1} \ldots\ldots)$ ein Polynom mit x von der Ordnung $m-1$ ist. [*Es ist nämlich*

$$\begin{aligned}(x^m \ldots\ldots) - (a^m \ldots\ldots) = {} & x^m - a^m \\ & + A(x^{m-1} - a^{m-1}) \\ & + B(x^{m-2} - a^{m-2}) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + U(x-a),\end{aligned}$$

wo, wie vorhin gezeigt, jedes Glied des Theils rechterhand durch $x - a$ *theilbar ist.*]

Es ist also, was auch a seyn mag,

239. $(x^m \ldots\ldots) = (x-a)(x^{m-1} \ldots\ldots) + (a^m \ldots\ldots).$

Auf dieselbe Weise kann man, wenn man eine andere Grösse b nimmt, das Polynom $(x^{m-1} \ldots\ldots)$ auf die Form

zweiten Lehrsatzes.

240. $(x^{m-1}\ldots.) = (x-b)(x^{m-2}\ldots.) + (b^{m-1}\ldots.)$

bringen, wo $(x^{m-2}\ldots.)$ ein Polynom von der niedrigern Ordnung $m-2$ bedeutet u. s. w.

Wäre nun die Gleichung

$$(x^m\ldots.) = 0$$

gegeben und a irgend eine Wurzel derselben, das heisst, ein Werth von x, für welchen $(x^m\ldots.) = 0$ ist, so wäre nothwendig auch

$$(a^m\ldots.) = 0;$$

also ist alsdann [*in* (239.)]

241. $(x^m\ldots.) = (x-a)(x^{m-1}\ldots.)$

und folglich $(x^m\ldots.)$ durch $x-a$ theilbar.

Giebt es ausser der Grösse a noch eine andere Grösse b, für welche ebenfalls, wenn man sie statt x setzt, $(x^m\ldots.) = 0$ ist, so muss diese Grösse, in (241.) statt x gesetzt, den zweiten Factor rechterhand $(x^{m-1}\ldots.)$ verschwinden machen und folglich von der Art seyn, dass

$$(b^{m-1}\ldots.) = 0$$

ist. Also reducirt sich [*in* (240.) *wegen* $(b^{m-1}\ldots.) = 0$] die Grösse $(x^{m-1}\ldots.)$ auf

242. $(x^{m-1}\ldots.) = (x-b)(x^{m-2}\ldots.)$

und es ist [*in* (239.)]

243. $(x^m\ldots.) = (x-a)(x-b)(x^{m-2}\ldots.)$,

so dass also das Polynom $(x^m\ldots.)$ nothwendig durch $x-a$ und $x-b$ theilaar ist u. s. w.

Ueber den Beweis des

Hat also die Gleichung $(x^m \ldots) = 0$ eine Zahl n (die kleiner ist als m) reeller Wurzeln $a, b, c \ldots,$ so ist

244. $(x^m \ldots) = (x-a)(x-b)(x-c) \ldots (x^{m-n} \ldots)$

Der übrig bleibende Factor $(x^{m-n} \ldots)$ aber ist nicht mehr in einfache reelle Factoren zerlegbar [*nach der Voraussetzung nämlich, dass nur n reelle Factoren Statt finden*]. Dieserhalb kann nun das Polynom $(x^{m-n} \ldots)$, was auch x seyn mag, nie einen negativen Werth haben. Denn gäbe es irgend einen Werth von x, für welchen der Werth des Polynoms negativ wäre, so würde, weil man auf der andern Seite x allemal so gross annehmen kann, dass das erste Glied grösser als alle übrigen [*und folglich der Werth des ganzen Polynoms eine positive Grösse*] ist, folgen, dass zwei Werthe von x möglich sind, für welche der Werth des Polynoms das Zeichen wechselt, und dass also, dem ersten Lehrsatze (§. 91.) zu Folge, ein zwischenliegender Werth h von x existirt, für welchen $(x^{m-2} \ldots) = 0$, und welcher Werth also eine reelle Wurzel der Gleichung ist, und dass also alsdann

$$(x^{m-n} \ldots) = (x-h)(x^{m-n-1} \ldots)$$

ist, und folglich das Polynom $(x^m \ldots)$ noch den reellen Factor $x-h$ mehr hat: welches der Voraussezzung widerspricht. Das Polynom $(x^{m-n} \ldots)$ ist daher allemal positiv und deshalb die Ordnungs-Zahl desselben allemal eine gerade Zahl. Sein letztes Glied

Glied ist allemal positiv (§. 3.) und das letzte Glied des Polynoms (x^m....) ist folglich positiv oder negativ, je nachdem die Zahl der positiven Wurzeln a, b.... gerade oder ungerade ist.

[*Weil das Polynom* (x^{m-n}....), *nach der Voraussetzung, nicht mehr in reelle Factoren zerlegbar ist, kann es, dem ersten Lehrsatze zu Folge, für keinen Werth von* x *das Zeichen wechseln, und deshalb kann es* x *nur in Potenzen mit geraden Exponenten enthalten und dieserhalb nur positiv seyn, indem es für irgend einen Werth von* x, *der so gross ist, dass das erste Glied alle übrigen übertrifft, bestimmt positiv ist.*]

94.

Das Polynom (x^{m-n}....), ist nicht blos dann immer positiv, wenn die Gleichung (x^{m-n}....) $= 0$ keine reelle Wurzel hat, sondern auch dann, wenn sie, zu zweien, oder vieren, oder überhaupt in geraden Zahlen, gleiche Wurzeln hat. Denn alsdann hat das Polynom Factoren von der Form $(x-g)^{2r}$, wo $2r$ eine gerade Zahl ist; und eine Grösse wie $(x-g)^{2r}$ ist immer positiv, was auch x seyn mag.

Daraus folgt, dass der zweite Lehrsatz auch für dreifache, fünffache Wurzeln u. s. w. gilt. Da es aber besondere Verfahren für die gleichen Wurzeln giebt, so kann man bei den ungleichen Wurzeln und ihrer Entwickelung stehen bleiben.

Ueber den Beweis des zweit. Lehrsatz.

95.

Uebrigens aber kann man, in dem Sinne algebraischer Rechnungen, welche allemal von einzelnen Werthen der Grössen unabhängig sind, das Polynom (x^m) unbedingt als ein Product von so vielen einfachen Factoren $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$ *etc.* ansehen, als der Exponent des Polynoms m, Einheiten enthält, was auch die Grössen a, b, c.... seyn mögen, so dass allemal die identische Gleichung

245. $$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots\ldots \pm U = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots,$$

unabhängig von dem Werthe von x Statt findet.

Auf dieser Umformung der Polynome beruht die ganze Theorie der Gleichungen. Wir haben oben die verschiedenen Verhältnisse zwischen den Grössen a, b, c.... in den Factoren und den Coefficienten A, B, C.... des Polynoms gefunden, und in diesen Verhältnissen bestehen die allgemeinen Eigenschaften der Gleichungen. (Man sehe weiter unten den zehnten Zusatz.)

Die Factoren, welche man für Polynome voraussetzt, deren Werthe nie negativ seyn können, nennt man imaginaire Grössen, und die Grössen a, b, c.... in diesen Factoren sind die unmöglichen Wurzeln der Gleichungen, welche entstehen, wenn man die Polynome gleich Null setzt. Daraus folgt, dass die Zahl dieser unmöglichen Wurzeln nothwendig gerade, und das Product der Wurzeln, welches dem letzten Gliede des Polynoms gleich kommt, immer positiv ist.

Dritter Zusatz.

Ueber die Gleichung zwischen den Differenzen der Wurzeln einer gegebenen Gleichung, zu zweien genommen.

96.

Die Untersuchung dieser Gleichung, welche der Gegenstand des achten Paragraphs war, würde sehr beschwerlich seyn, wenn man sich dabei, wie es sich zunächst darbietet, der Elimination bedienen wollte. Durch die Ausdrücke, welche ich daselbst mittheilte, reducirt sich die Schwierigkeit blos auf die Weitläuftigkeit der Rechnung. Alles kommt darauf an, eine gewisse Zahl von Gliedern dreier verschiedenen Reihen zu finden, deren Gesetz sehr einfach ist.

97.

Die erste Reihe, nämlich die der Grössen A_1, A_2, A_3.... ist keine andere als die bekannte Reihe für die Summe der Potenzen der Wurzeln, durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückt. Man wird den Beweis davon in dem sechsten Zusatze finden. Die dritte Reihe, nämlich die

Ueber die Differenzen-

der Grössen a, b, c, welche die Coefficienten der gesuchten Gleichung sind, ist die Umkehrung der vorigen. Sie giebt diese Coefficienten durch die Summe der Potenzen der Wurzeln, die man aus der zweiten Reihe der Grössen a_1, a_2, a_3 erhält. Ich hatte oben das Gesetz der Glieder der letztern nur durch Induction gefunden; man kann aber auch dieses Gesetz allgemein finden.

Man darf zu dem Ende nur die Grösse

$$246.\quad (x-\alpha)^s + (x-\beta)^s + (x-\gamma)^s \ldots.$$

nehmen, welche, wenn man sie nach den Potenzen von x entwickelt,

$$247.\quad m x^s - s A_1 x^{s-1} + \frac{s(s-1)}{2} A_2 x^{s-2} - \frac{s(s-1)(s-2)}{2.3} A_3 x^{s-3} \ldots.$$

giebt, [*wo*

$$A_1 = \alpha + \beta + \gamma \ldots.$$
$$A_2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \ldots.$$
$$A_3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \ldots.$$

etc. ist.]

Da diese beiden Ausdrücke identisch den nämlichen Werth haben, so kann man x annehmen, wie man will. Man setze also, der Reihe nach, $x = \alpha$, $x = \beta$, $x = \gamma$ *etc.* und addire die Resultate, so erhält man

$$248.\quad \begin{cases} (\alpha-\beta)^s + (\alpha-\gamma)^s \ldots. \\ + (\beta-\alpha)^s + (\beta-\gamma)^s \ldots. \\ + (\gamma-\alpha)^s + (\gamma-\beta)^s \ldots. \\ = m A_s - s A_1 A_{s-1} + \frac{s(s-1)}{2} A_2 A_{s-2} \\ \quad - \frac{s(s-1)(s-2)}{2.3} A_3 A_{s-3} \ldots., \end{cases}$$

Gleichung.

wie leicht zu sehen, weil nach der obigen Bezeichnung allgemein

$$249.\quad A_s = \alpha^s + \beta^s + \gamma^s \ldots.$$

ist.

Ist nun s eine ungerade Zahl, so heben sich alle Glieder des ersten Theils der Gleichung (248.) auf. [*Denn dieser erste Theil der Gleichung ist gleich*

$$(\alpha-\beta)^s + (\alpha-\gamma)^s + \ldots. + (\beta-\gamma)^s \ldots.$$
$$+ (\beta-\alpha)^s + (\gamma-\alpha)^s + \ldots. + (\gamma-\beta)^s \ldots.,$$

und wenn s ungerade ist, so ist $(\alpha-\beta)^s = -(\beta-\alpha)^s$, $(a-\gamma)^s = -(\gamma-\alpha)^s$ *etc., so dass alles zusammen Null ist.*] Der zweite Theil der Gleichung ist ebenfalls von selbst Null, wenn man bemerkt, dass

$$A_0 = \alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 \ldots. = m,$$

gleich der Zahl der Wurzeln ist. [*Denn das letzte Glied dieses zweiten Theils der Gleichung ist* $-A_s A_0 = -m A_s$, *das vorletzte Glied ist* $+ s A_{s-1} A_1$, *das diesem vorhergehende Glied ist* $-\frac{s(s-1)}{2} A_{s-2} A_2$ *u. s. w.; also hebt sich das erste Glied mit dem letzten, das zweite mit dem vorletzten, das dritte mit dem Gliede vor dem vorletzten u. s. w. auf, und in der Mitte sind zwei gleiche Glieder, die sich ebenfalls aufheben, so dass die ganze Summe Null ist.*]

Ist hingegen s eine gerade Zahl, z. B.

$$s = 2\mu,$$

so ist nach der Bezeichnung der Glieder der zweiten

Ueber die Differenzen-

Reihe [(§. 9.)] das erste Glied [*welches alsdann* $2(\alpha-\beta)^2 + 2(\alpha-\gamma)^s \ldots\ldots + 2(\beta-\gamma)^s \ldots\ldots$ *ist, gleich*] $2a_\mu$; also ist in diesem Falle [*zu Folge* (248.)]

$$250.\quad 2a_\mu = mA_{2\mu} - 2\mu A_2 A_{2\mu-1} + \frac{2\mu(2\mu-1)}{2} A_2 A_{2\mu-2} - \frac{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)}{2.3} A_3 A_{2\mu-3} \ldots\ldots$$

Da die Glieder rechterhand in gleichen Entfernungen von dem mittlern Gliede, welches $A_\mu A_\mu$ enthält, gleich sind, so erhält man, wenn man die gleichen Glieder zusammen nimmt und die Summe durch 2 dividirt, den allgemeinen Ausdruck für a_μ in (§. 8.)

98.

Man kann auch auf dieselbe Weise die Ausdrücke für die Summe der Wurzeln, zu zweien genommen, finden. Die Grösse

$$251.\quad (x+\alpha)^s + (x+\beta)^s + (x+\gamma)^s \ldots\ldots$$

giebt, wenn man sie entwickelt, den gleichbedeutenden Ausdruck

$$252.\quad mx^s + sA_1 x^{s-1} + \frac{s(s-1)}{2} A_2 x^{s-2} + \frac{s(s-1)(s-2)}{2.3} A_3 x^{s-3} \ldots\ldots$$

Setzt man also wieder, der Reihe nach, $x = \alpha$, $x = \beta$, $x = \gamma$ *etc.* und nimmt die Resultate zusammen, so erhält man

Gleichung.

253. $$\begin{cases} 2^s(\alpha^s+\beta^s+\gamma^s\ldots.) \\ +2(\alpha+\beta)^s+2(\alpha+\gamma)^s+2(\beta+\gamma)^s\ldots. \\ = mA_s+sA_1A_{s-1}+\frac{s(s-1)}{2}A_2A_{s-2} \\ \quad +\frac{s(s-1)(s-2)}{2.3}A_3A_{s-3}\ldots. \end{cases}$$

Bezeichnet man also allgemein

254. $(\alpha+\beta)^s+(\alpha+\gamma)^s\ldots.+(\beta+\gamma)^s\ldots.$ durch a_s,

so erhält man aus (253.), weil $\alpha^s+\beta^s+\gamma^s\ldots.=A_s$ ist,

255. $$2a_s=(m-2)^sA_s+sA_1A_{s-1}+\frac{s(s-1)}{2}A_2A_{s-2}$$
$$+\frac{s(s-1)(s-2)}{2.3}A_3A_{s-3}\ldots.$$

Da s eine ganze Zahl ist, so sind die Glieder in gleichen Entfernungen von den Enden gleich. Nun ist das letzte Glied gleich A_sA_0, und, weil $A_0=m$, gleich mA_s. Zieht man also das erste und letzte, das zweite und vorletzte Glied u. s. w. zusammen und dividirt das Ganze durch 2, so erhält man, wenn s eine ungerade Zahl ist,

256. $$a_s=(m-2^{s-1})A_s+sA_1A_{s-1}+\frac{s(s-1)}{2}A_2A_{s-2}\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{s(s-1)(s-2)\ldots.\left(\frac{s+3}{2}\right)}{1.2.3\ldots.\left(\frac{s-1}{2}\right)}A_{\frac{s-1}{2}}A_{\frac{s+1}{2}},$$

und, wenn s eine gerade Zahl ist,

Ueber die Differenzen-

$$257.\ a_s = (m-2^{s-1})A_s + sA_1A_{s-1} + \frac{s(s-1)}{2}A_2A_{s-2} \ldots$$

$$\ldots + \frac{s(s-1)(s-2)\ldots\left(\frac{s}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\frac{s}{2}}\left(\frac{A_{\frac{s}{2}}}{2}\right)^2.$$

Berechnet man nach diesem Ausdrucke die Glieder der Reihe a_1, a_2, a_3 *etc.* und setzt sie in die Ausdrücke der Grössen a, b, c *etc.* der dritten Reihe, so erhält man die Coefficienten der Gleichung, deren Wurzeln die n Summen $\alpha+\beta$, $\alpha+\gamma$, $\beta+\gamma\ldots$ der Wurzeln der gegebenen Gleichung, zu zweien genommen, sind. Diese Gleichung kann in vielen Fällen nützlich seyn. [*Man sehe auch über diese Gegenstände die oben in* (*§.* 8.) *angeführten Schriften.*]

99.

Ich muss übrigens bemerken, dass schon Waring in seinen „Miscell. anal." die im Jahre 1762 gedruckt sind, sagt, dass die Gleichung, deren Wurzeln

$$\frac{1}{\alpha-\beta},\ \frac{1}{\alpha-\gamma}\ldots,\ \frac{1}{\beta-\gamma}\ldots$$

wären, diene, die Grenzen der reellen Wurzeln einer Gleichung mit den Wurzeln α, β, $\gamma\ldots$ zu finden. Als ich indessen meine erste Abhandlung über die Auflösung der numerischen Gleichungen schrieb, war mir jenes Werk nicht bekannt. Auch wäre die Bemerkung von Waring, weil sie nur isolirt dasteht, ohne die Untersuchungen in jener Abhandlung, vielleicht lange ohne weitere Folgen geblieben.

Gleichung.

Auch muss ich bemerken, dass Waring schon vor mir die Kennzeichen der unmöglichen Wurzeln einer gegebenen Gleichung, welche in den Zeichen der Gleichung liegen, deren Wurzeln die Quadrate der Differenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind, erkannt hat. Er sagt aber in dem angeführten Werke blos, dass, wenn die Differenzen-Gleichung lauter Zeichenwechsel habe, ihre Stammgleichung nothwendig lauter reelle Wurzeln haben müsse: im entgegengesetzten Falle habe sie imaginaire Wurzeln. Aber späterhin, in den „philosophical transactions" vom Jahre 1763 hat er auch, wiewohl ohne Beweis, die Bedingungen gezeigt, welche für Gleichungen des vierten und fünften Grades Statt finden, wenn diese Gleichungen entweder lauter reelle Wurzeln, oder zwei oder vier imaginaire Wurzeln haben, welches bis dahin für den fünften Grad noch Niemand gezeigt hatte.

In einer zweiten Abhandlung habe ich mich begnügt, die Differenzen-Gleichung für den zweiten, dritten und vierten Grad zu geben. Die Weitläuftigkeit der Rechnung hielt mich ab, dieselbe auf den fünften Grad auszudehnen. Da indessen das Resultat zuweilen nützlich seyn kann, so will ich es hier nach Waring hersetzen.

100.

Es sey also die Gleichung des fünften Grades

258. $x^5 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0$

gegeben, so ist ihre Differenzen-Gleichung

Ueber die Differenzen-

259. $$v^{10} - av^9 + bv^8 - cv^7 + dv^6 - ev^5 + fv^4 - gv^3 + hv^2 - iv + k = 0,$$

wo

260. $$\left\{\begin{aligned}
a &= -10B \\
b &= 39B^2 + 10D \\
c &= -80B^3 - 50BD - 25C^2 \\
d &= 95B^4 + 124B^2D - 95D^2 + 92BC^2 \\
&\quad + 1200CE \\
e &= -66B^5 + 360BD^2 - 169B^3D - 118B^2C^2 \\
&\quad - 260C^2D - 625E^2 - 400BCE \\
f &= -25B^6 + 40D^3 - 53C^4 + 52B^3C^2 \\
&\quad - 522B^2D^2 + 194B^4D + 708BC^2D \\
&\quad + 240B^2CE + 1750BE^2 - 950CDE \\
g &= -4B^7 - 106B^5D + 80BD^3 + 308B^3D^2 \\
&\quad + 102BC^4 + 7B^4C^2 - 570C^2D^2 \\
&\quad - 612B^2C^2D - 700C^3E + 3750DE^2 \\
&\quad - 2500B^2E^2 - 80B^3CE + 2150BCDE \\
h &= 400D^4 - 360B^2D^3 - 15B^4D^2 + 24B^6D \\
&\quad - 8B^5C^2 - 45B^2C^4 - 270C^4D \\
&\quad + 140B^3C^2D + 960BC^2D^2 + 1875C^2E^2 \\
&\quad + 1000CD^2E - 5000BDE^2 + 1750B^3E^2 \\
&\quad + 40B^4CE + 600BC^3E - 1650B^2CDE \\
i &= -36B^5D^2 + 224B^3D^3 - 320BD^4 - 4B^3C^4 \\
&\quad - 27C^6 + 40C^2D^3 - 434B^2C^2D^2 \\
&\quad + 24B^4C^2D + 198BC^4D - 5000D^2E^2 \\
&\quad + 450C^3DE + 6250CE^3 - 675B^4E^2 \\
&\quad + 3750B^2DE^2 - 3000BC^2E^2 \\
&\quad - 60B^2C^3E - 200BCD^2E \\
&\quad + 330B^3CDE
\end{aligned}\right.$$

Gleichung.

260. $$\begin{aligned} k = {} & 3125E^4 - 3750BCE^3 + (2000BD^2 + 2250C^2D \\ & - 900B^3D + 825B^2C^2 + 108B^5)E^2 \\ & - (1600CD^3 - 560B^2CD^2 - 16B^3C^3 \\ & + 630BC^3D + 72B^4CD - 108C^5)E \\ & + 256D^5 - 128B^2D^4 + 144BC^2D^3 \\ & + 16B^4D^3 - 27C^4D^2 - 4B^3C^2D^2. \end{aligned}$$

Wenn alle Wurzeln einer Gleichung des fünften Grades reell seyn sollen, so müssen also alle diese Grössen a, b, c.... positiv seyn, welches, wie man sieht, zehn verschiedene Bedingungen giebt. Es ist aber möglich, dass einige derselben in dem Systeme der übrigen enthalten sind, alsdann die Zahl der Bedingungen, wie wir bei dem vierten Grade sahen, kleiner ist. Finden nicht alle diese Bedingungen zugleich Statt, so hat die Gleichung nothwendig zwei oder vier unmögliche Wurzeln, je nachdem k eine positive oder negative Grösse ist. Wäre k gleich Null, so hätte die Gleichung zwei gleiche Wurzeln. Wäre auch i gleich Null, so hätte sie drei gleiche Wurzeln u. s. w.

Vierter Zusatz.

Ueber das Verfahren, eine Grösse zu finden, welche kleiner ist, als die kleinste Differenz zwischen den Wurzeln einer gegebenen Gleichung.

101.

Die Berechnung dieser Grenze ist nöthig, um die Reihe der Zahlen zu finden, welche, nach einander substituirt, mit Sicherheit alle reelle Wurzeln der Gleichung geben (§. 6.). Das sicherste Mittel ist, was wir oben angaben, die Gleichung selbst zu berechnen, deren Wurzeln die Differenzen zwischen den Wurzeln der gegebenen Gleichung sind, und hernach die Grenzen der kleinsten Wurzel dieser Gleichung zu suchen. Wenn aber die Ordnungs-Zahl der gegebenen Gleichung ein wenig hoch ist, so steigt diejenige der Differenzen-Gleichung so sehr hoch, dass die Rechnung, um alle Glieder dieser Gleichung zu finden, beschwerlich ist; denn wenn die Ordnungs-Zahl der gegebenen Gleichung m ist, so hat man $\frac{m(m-1)}{2}$ Coefficienten, und um die Reihe (§. 8.)

Differenzen der Wurzeln.

zu finden $2m(m-1)$ Glieder zu berechnen. [*Also zum Beispiel bei einer Gleichung des zehnten Grades schon* $2 . 10 . 9 = 180$ *Glieder.*]

Da auf solche Weise die allgemeine Methode fast unausführbar ist, wenn die Ordnungs-Zahl der Gleichung ein wenig hoch steigt, so habe ich mich lange Zeit bemüht, Mittel zu finden, durch welche sich die Untersuchung der Differenzen-Gleichung ersparen liesse; und ich habe in der That gefunden, dass man ohne dieselbe ganz zu berechnen, allerdings die Grenze finden kann, welche kleiner ist als die kleinste Wurzel, welches den Hauptzweck der Differenzen-Gleichung ausmacht.

102.

Die gegebene Gleichung sey

261. $x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} \ldots = 0,$

welches wir, der Kürze wegen, durch

262. $X = 0$

bezeichnen wollen, so nehme man von derselben, nach (§. 8.), die Gleichung in u,

263. $[U =]\, Y + Zu + Vu^2 \ldots + u^{m-1} = 0,$

in welcher

$$264. \begin{cases} Y = mx^{m-1} - (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-2} \ldots \\ Z = \dfrac{m(m-1)}{2}x^{m-2} - \dfrac{(m-1)(m-2)}{2}Ax^{m-3} \ldots \\ V = \dfrac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3} \ldots \end{cases}$$

etc.

Ueber die Grenzen der

oder

$$265.\quad Y = X',\ Z = \frac{X''}{2},\ V = \frac{X'''}{2.3}\ldots.$$

ist, wo X', X'', X''' die Ableitungen von X oder die Differential-Coefficienten von X bedeuten, so dass also

$$266.\quad Y = \frac{dX}{dx},\ Z = \tfrac{1}{2}\frac{d^2X}{dx^2},\ V = \frac{1}{2.3}\frac{d^3X}{dx^3}\ldots.$$

ist.

Nun sahen wir, in (§. 8.), dass diese Gleichung, $U = 0$, wenn man darin statt x irgend eine Wurzel der Gleichung $X = 0$ setzt, die Differenzen zwischen dieser und allen übrigen Wurzeln der Gleichung $X = 0$ zu Wurzeln hat. Substituirt man also, der Reihe nach, die m Wurzeln der Gleichung $X = 0$, so erhält man m Gleichungen in u, deren Wurzeln alle mögliche Differenzen zwischen den Wurzeln der gegebenen Gleichung sind. Mithin kommt es nur darauf an, eine Grösse zu finden, die kleiner ist, als die kleinste Wurzel irgend einer von den m Gleichungen.

Setzt man also

$$267.\quad u = \frac{1}{k},$$

wodurch die Gleichung $U = 0$ mit u in

$$268.\quad Y + \frac{Z}{k} + \frac{V}{k^2}\ldots. + \frac{1}{k^{m-1}} = 0,$$

oder, wenn man mit k^{m-1} multiplicirt, und mit Y dividirt, in

$$269.\ [K=]\ k^{m-1} + \frac{Z}{Y}k^{m-2} + \frac{V}{Y}k^{m-3}\ldots. + \frac{1}{y} = 0$$

Differenzen der Wurzeln.

übergeht, so kommt alles darauf an, eine Grösse zu finden, die grösser ist als die grösste Wurzel dieser letzten Gleichung, wenn man in dieselbe für x irgend eine von den m Wurzeln der gegebenen Gleichung setzt. Denn nennt man diese Grösse L, so ist klar, dass [*in* (267.) $u =$] $\frac{1}{L}$ die gesuchte Grenze seyn wird, welche kleiner ist, als irgend eine von diesen Wurzeln.

103.

Nun ist bekannt, dass der grösste Coefficient in den negativen Gliedern einer Gleichung, positiv genommen, und um Eins vergrössert, grösser ist als die grösste Wurzel der Gleichung [(§. 12.)]. Man darf also, um die Grenze L zu finden, nur den grössten negativen Werth suchen, welchen die Coefficienten $\frac{Z}{Y}$, $\frac{V}{Y}$ *etc.* der Gleichung $K = 0$ erhalten können, wenn man in diese Gleichung die Werthe der Wurzeln der Gleichung $X = 0$ substituirt, oder auch eine noch grössere Grösse.

Enthielten diese Coefficienten keine Potenzen von x im Nenner [*welches der Fall ist, weil überall die Grösse Y, die x enthält, im Nenner steht*], so liesse sich die Aufgabe leicht auflösen. Man dürfte nur in die positiven Glieder eine Grösse statt x sezzen, welche kleiner ist als der kleinste positive Werth von x, und in die negativen Glieder eine Grösse, welche grösser ist. Denn es ist klar, dass man auf diese

Weise negative Grössen erhalten würde, welche grösser sind als der negative Werth, den irgend ein Coefficient durch die Substitution irgend eines positiven Werthes von x annehmen kann. Und um auf die negativen Wurzeln zu sehen, dürfte man nur in die nämlichen Coefficienten $-x$ statt $+x$, und hierauf in die positiven Glieder einen Werth von x sezzen, der kleiner ist als die kleinste negative Wurzel der Gleichung, positiv genommen, und in die negativen Glieder einen Werth von x, der grösser ist als die zweifache Wurzel.

Die auf diese Weise gefundene grösste negative Grösse, positiv genommen, und um Eins vergrössert, könnte ohne Bedenken statt der gesuchten Grenze L gesetzt werden.

Die ganze Schwierigkeit liegt daher nur in dem Nenner Y, welcher ebenfalls noch x enthält. Ich hatte vorgeschlagen, für Y einen Werth zu setzen, der kleiner ist als irgend einer von denen, die man erhält, wenn man die Wurzeln der Gleichung $X = 0$ substituirt. Aber dann ist wieder die Schwierigkeit, diese neuen Grenzen zu finden, und es scheint nicht wohl möglich, sie anders als aus einer Gleichung zu finden, deren Wurzeln die verschiedenen Werthe von Y sind.

Um zu dieser Gleichung zu gelangen, müsste man

$$270. \quad Y = y$$

setzen und x zwischen den Gleichungen

$$271. \quad X = 0 \text{ und } y - Y = 0$$

eliminiren. Die entstehende Gleichung würde vom

m ten

Differenzen der Wurzeln.

mten Grade seyn. [*Denn* $X = 0$ *ist vom* m*ten Grade nach* x, *und* $y - Y = 0$, *vom ersten Grade nach* y.] Man könnte dann eine Grösse, die kleiner ist als ihre kleinste Wurzel, als Grenze für Y annehmen. Aber auch die Berechnung dieser Gleichung mit Y kann noch sehr weitläufig seyn, man mag sie durch Elimination, oder direct aus der Natur ihrer Wurzeln finden.

104.

Ich habe späterhin bemerkt, dass man die unbekannte Grösse x aus dem Polynom Y eliminiren könne, wenn man dasselbe durch ein anderes, dazu passendes Polynom vom $m-1$ten Grade multiplicirt und vermittelst der Gleichung $X = 0$ alle Potenzen von x wegschafft, welche die $m-1$te Ordnung übersteigen.

Man nehme z. B. das Polynom

272. $x^{m-1} - ax^{m-2} + bx^{m-3} - cx^{m-4} \ldots = \zeta$,

welches wir, der Kürze wegen, durch ζ bezeichnen wollen, und in welchem die Coefficienten a, b, c.... unbestimmt sind. Multiplicirt man mit demselben das Polynom Y, so erhält man ein anderes Polynom von der Ordnung $2m-2$. Nun giebt die Gleichung $X = 0$ zuerst den Werth von x^m. Mit diesem Werthe kann man, wenn man immerfort mit x multiplicirt und, wo es nöthig ist, den Werth von x^m substituirt, alle Potenzen von x, die höher sind als x^{m-1}, bis zu x^{2m-2} ausdrücken. Substituirt man diesen

Ueber die Grenzen der

Werth in das Polynom $Y\zeta$, so bringt man dasselbe auf die $m-1$ Potenz herab, und kann dann alle Glieder desselben verschwinden machen, indem man alle seine Coefficienten einzeln gleich Null setzt, welches $m-1$, nach a, b, c.... lineäre Gleichungen giebt, die zur Bestimmung der $m-1$ unbekannten Grössen dienen. Bezeichnet man das übrig bleibende, oder die übrig bleibenden ganz bekannten Glieder durch R, so ist

$$273. \quad Y\zeta = R \text{ und folglich } Y = \frac{R}{\zeta}.$$

[*Zur Erläuterung dieses Verfahrens dient weiter unten das Beispiel* (*§*. 109.)] Die Gleichung $K=0$ mit k (269.) geht alsdann, wenn man $\frac{R}{\zeta}$ statt Y setzt, in

$$274. \quad k^{m-1} + \frac{Z\zeta}{R} x^{m-2} + \frac{V\zeta}{R} x^{m-3} \ldots + \frac{\zeta}{R} = 0$$

über; und da nun die Coefficienten $\frac{Z\zeta}{R}$, $\frac{V\zeta}{R}$.... nur Potenzen von x ohne Nenner enthalten, so kann man auf dieselben das oben vorgeschlagene Verfahren anwenden und eine Grenze L finden, welche grösser ist als der grösste Werth von k.

Man kann auch die Polynomen $Z\zeta$, $V\zeta$ *etc.* durch die nämliche Substitution der Werthe von x^m und höherer Potenzen als x^m auf die Weise umformen, dass sie nur niedrigere Potenzen als x^{m-1} enthalten. Diese Umformung ist aber nicht unbedingt nothwendig, und man kann ohne Nachtheil die Polynomen gebrauchen, wie die Multiplication von Z, V *etc.*

Differenzen der Wurzeln.

mit ζ sie giebt; aber sie ist zur Vereinfachung der Rechnung und um eine nähere Grenze L zu finden, nützlich.

105.

Es ist auch zu bemerken, dass, da die Werthe von u, welche diejenigen der Differenzen zwischen den Wurzeln der gegebenen Gleichung sind, eben so wohl positiv als negativ seyn können, ein Gleiches auch mit den Werthen von k Statt findet, weil $u = \frac{1}{k}$ gesetzt wurde (267.), woraus folgt, dass die Grenze der positiven Werthe von k auch die Grenze der negativen Werthe dieser Grösse, positiv genommen, und umgekehrt die Grenze der grössten negativen Werthe, positiv genommen, die der grössten positiven Werthe ist.

Man kann also in der Gleichung mit k, die Grösse k sowohl positiv als negativ, und folglich das zweite, vierte, sechste etc. Glied dieser Gleichung mit entgegengesetzten Zeichen nehmen, im Fall man auf diese Weise eine kleinere Grenze findet.

106.

Hat man dann die Grenze L gefunden, so ist $\frac{1}{L}$ eine Grenze, welche kleiner ist als die kleinste Differenz zwischen den Wurzeln der gegebenen Gleichung, und man kann in (§. 6.)

$$275. \quad \Delta = \frac{1}{L}$$

setzen, welches die Reihe der Zahlen Δ, 2Δ, 3Δ *etc.* giebt, durch deren Substitution man auf sicherm Wege alle reelle Wurzeln der Gleichung und ihre erste Grenze findet.

Wäre die Grösse R Null, so wäre L unendlich gross und die Grenze $\frac{1}{L}$ gleich Null, welches dann die Gleichheit zweier oder mehrerer Wurzeln der gegebenen Gleichung anzeigt. In der That ist klar, dass, wenn zwei Wurzeln einander gleich sind, einer der Werthe von u gleich Null seyn muss; also muss alsdann das letzte Glied Y der Gleichung $U = 0$ (263.) Null seyn, wenn man statt x eine der Wurzeln der Gleichung $X = 0$ setzt. Diese Gleichung $X = 0$ findet also alsdann mit $Y = 0$, das heisst, mit $\frac{dX}{dx} = 0$ (266.) zugleich Statt; welches der bekannte Satz von den gleichen Wurzeln ist. Die durch Wegschaffung von x entstehende Gleichung findet also ebenfalls Statt. Wie leicht zu sehen, ist aber diese Gleichung nichts anders, als die Gleichung $R = 0$ selbst; denn weil das Product $Y\zeta$, vermöge der Gleichung $X = 0$, gleich R ist, so ist $Y = \frac{R}{\zeta}$, und folglich giebt $Y = 0$ auch $R = 0$.

Zeigt sich auf diese Weise, dass die Gleichung mit x gleiche Wurzeln hat, so findet man dieselben, wenn man den gemeinschaftlichen Divisor der Gleichungen $X = 0$ und $Y = 0$ sucht (§. 15.). Hierauf geht die Gleichung mit k (274.), wenn man sie mit

Differenzen der Wurzeln.

R multiplicirt und das Product mit $Z\zeta$ dividirt, weil $R = 0$ ist, in

276. $k^{m-2} + \frac{V}{Z} k^{m-3} \ldots + \frac{1}{Z} = 0$

über, auf welche neue Gleichung man nun wieder das nämliche Verfahren anwenden kann, um eine Grenze zu finden, die grösser ist als k, u. s. w.

Da es übrigens, ehe man die Auflösung einer Gleichung, durch welches Verfahren es auch sey, unternimmt, immer nöthig ist, vorher zu sehen, ob sie gleiche Wurzeln habe, weil diese Wurzeln auf andere Weise genau gefunden werden können, so sieht man, dass die Berechnung der Grösse R, wenn man sich der Differenzen-Gleichung nicht bedienen will, immer unerlässlich ist; denn die Gleichung $R = 0$ [*welche mit* $Y = \frac{dX}{dx} = 0$ *einerlei ist*] ist gerade diejenige, welche man auf die gewöhnliche Weise findet, wenn man die Bedingungen der Gleichheit der Wurzeln sucht. Das obige Verfahren verlängert also auf diese Weise die zur Auflösung der Gleichung erforderliche Rechnung nicht.

107.

Sobald die Grösse R gefunden ist, kommt es nur darauf an, eine Grösse zu haben, welche der grössten negativen unter den Grössen $\frac{Z\zeta}{R}$, $\frac{V\zeta}{R}$ *etc.* $\frac{\zeta}{R}$, nämlich unter den Coefficienten der Gleichung mit k (274.), gleich oder grösser ist als diese Grösse. Um eine solche Grösse zu finden, setze man in die po-

sitiven Glieder dieser Coefficienten, statt x eine Grösse, die kleiner ist als die kleinste positive Wurzel der Gleichung $X = 0$, und in die negativen Glieder eine Grösse, die grösser ist als die grösste dieser Wurzeln. Hierauf setze man, nachdem in den nämlichen Coefficienten x mit $-x$ verwechselt worden, in die positiven Glieder eine Grösse, die kleiner ist als die kleinste der negativen Wurzeln, und in die negativen Glieder eine Grösse, die grösser ist als die grösste negative Wurzel, positiv genommen. Das grösste negative Resultat, welches man auf diese Weise findet, positiv genommen und um Eins vergrössert, ist der gesuchte Werth der Grenze L.

Um diese Grössen zu finden, welche grösser oder kleiner als die Wurzeln der Gleichung $X = 0$ sind, könnte man für die grössere Grösse ohne weiteres den grössten Coefficienten der negativen Glieder der Gleichung annehmen, nachdem zu demselben Eins addirt worden. Ferner könnte man, nachdem x mit $\frac{1}{x}$ verwechselt und die Potenzen von x mit negativen Exponenten durch Multiplication weggeschafft worden, den grössten Coefficienten der Glieder nehmen, welche das entgegengesetzte Zeichen der vorigen haben, und die Einheit, dividirt durch jenen Coefficienten, $+ 1$, würde die Grösse seyn, welche kleiner ist als die Wurzeln. Für die negativen Wurzeln dürfte man nur $-x$ statt $+x$ setzen, um sie positiv zu machen, so fände man ebenfalls Grössen, welche grösser oder kleiner sind als die Wurzeln.

Differenzen der Wurzeln.

Aber obgleich die Grenzen, welche man auf diese Weise findet, sehr sicher sind, so können dieselben doch allzuweit von einander entfernt liegen, so dass man für die Grenze L eine gar zu grosse Grösse, und folglich für die Differenz Δ der Glieder der Reihe eine zu kleine Grösse findet, weswegen dann zu viele Substitutionen in die gegebene Gleichung nothwendig sind, um alle Wurzeln zu finden (§. 6.).

108.

Es ist daher gut, engere Grenzen zu haben, welche man nach (§. 12.) finden kann. Nach dem dortigen Verfahren darf man nur zunächst einen Werth von x suchen, welcher die Grössen $X, \frac{dX}{dx}, \frac{d^2X}{dx^2}$.... positiv macht, was nicht schwer ist, wenn man von der letzten, welche x nur in einer Abmessung enthält, anfängt und zu der vorhergehenden zurückgeht.

Dieser Werth von x ist dann grösser als alle positive Wurzeln der Gleichung $X = 0$. Um eine Grenze zu haben, die kleiner ist, verwandle man die Grösse $X = 0$ durch die Substitution von $\frac{1}{x}$ statt x und durch die Multiplication mit x^m, um die Potenzen von x mit negativen Exponenten wegzuschaffen. Ist das Glied, welches x^m enthält, negativ, so verwechsle man alle Zeichen, um es positiv zu machen.

Man setze diese neue Function statt x, und nachdem man davon die Ableitungen $\frac{dX}{dx}, \frac{d^2X}{dx^2}$ *etc.*

genommen, suche man wiederum einen Werth von x, für welchen alle diese Grössen positiv sind. Die Einheit, dividirt durch diesen Werth, giebt eine Grenze, welche kleiner ist als alle positive Wurzeln der Gleichung $X = 0$. Endlich setze man in diese beiden Reihen $-x$ statt x und verändere alle Zeichen, im Fall die höchste Potenz von x das Zeichen $-$ hat; die Werthe von x, für welche alle diese Grössen positiv sind, werden grösser und kleiner seyn als die negativen Wurzeln der Gleichung, positiv genommen.

109.

Um ein Beispiel dieses Verfahrens zu geben, wollen wir solches auf die Gleichung

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

anwenden, welche wir in (§. 27.) auflöseten.

Für diese Gleichung ist

$$X = x^3 - 7x + 7$$

und die Ableitungen sind

$$\frac{dX}{dx} = 3x^2 - 7, \quad \frac{d^2X}{dx^2} = 6x, \quad \frac{d^3X}{dx^3} = 6, \quad \frac{d^4X}{dx^4} = 0 \text{ etc.}$$

Also ist

$$Y = \frac{dX}{dx} = 3x^2 - 7, \quad Z = \frac{1}{2}\frac{d^2X}{dx^2} = 3x, \quad V = \frac{1}{2.3}\frac{d^3X}{dx^3} = 1,$$

und die Gleichung $U = 0$ mit u (263.) ist vom zweiten Grade.

Man nehme also ein unbestimmtes Polynom des zweiten Grades

$$\zeta = x^2 + ax + b$$

Differenzen der Wurzeln.

an, und multiplicire solches mit dem Polynom Y [$= 3x^2 - 7$], so erhält man

$$Y\zeta = 3x^4 + 3ax^3 (3b - 7)x^2 - 7ax - 7b.$$

Nun giebt die Gleichung $X = 0$, $x^3 = 7x - 7$; also ist [*wenn man mit x multiplicirt*] $x^4 = 7x^2 - 7x$. Substituirt man dieses [*nämlich den Werth von* x^4 *und* x^3], so erhält man

$$Y\zeta = (36 + 14)x^2 + (14a - 21)x - 21a - 7b.$$

Man setze also

$$3b + 14 = 0,\ 14a - 21 = 0,\ -21a - 7b = R,$$

woraus

$$a = \tfrac{3}{2},\ b = -\tfrac{14}{3} \text{ und } R = \tfrac{7}{6}$$

folgt. Da die Grösse R nicht Null ist, so folgt, dass die gegebene Gleichung keine gleiche Wurzeln hat.

Nun ist [*wenn man in das obige* $\zeta = x^2 + ax + b$ *die gefundenen Werthe von* a *und* b, *nämlich* $a = \frac{3}{2}$ *und* $b = -\frac{14}{3}$ *setzt*]

$$\zeta = x^2 + \tfrac{3}{2}x - \tfrac{14}{3}.$$

Multiplicirt man dieses mit $Z = 3x$ und substituirt für x^3 seinen Werth [$7x - 7$], so erhält man

$$Z\zeta = \frac{9x^2}{2} + 7x - 21,$$

so dass die beiden Coefficienten $\left[\frac{Z\zeta}{R} \text{ und } \frac{Y\zeta}{R}\right]$ der Gleichung mit k (274) [$= \left(\frac{9x^2}{2} + 7x - 21\right)\frac{6}{7}$ *und* $(x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{14}{3})\frac{6}{7}$, *oder*]

$$\frac{27x^2 + 42x - 126}{7} \text{ und } \frac{6x^2 + 9x - 28}{7}$$

sind, wo es nun nur noch darauf ankommt, ohne x

Ueber die Grenzen der

zu kennen, eine Grösse zu finden, welche dem grössten negativen Werthe dieser Coefficienten gleich oder kleiner ist, als dieselben. Dieses geschiehet durch Untersuchung der Grenzen der Werthe von x.

110.

Zu dem Ende fange man damit an, Grenzen der grössten und kleinsten positiven und negativen Werthe von x zu suchen. Da der grösste Coefficient der negativen Glieder in der gegebenen Gleichung mit x [$x^3 - 7x + 7 = 0$] 7 ist, so kann man die Zahl 8 als eine Grenze ansehen, welche grösser ist, als die positiven Wurzeln. Man kann aber eine engere Grenze durch Untersuchung der Grössen X, $\frac{dX}{dx}$ und $\frac{d^2X}{dx^2}$, nämlich der Grössen

$$x^3 - 7x + 7,\ 3x^2 - 7 \text{ und } 6x$$

finden, wenn man einen Werth von x sucht, für welchen diese Grössen alle positiv sind. Ein solcher Werth ist $x = 2$; also ist 2 grösser als alle positive Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Setzt man in X, $\frac{dX}{dx}$ und $\frac{d^2X}{dx^2}$, $-x$ statt x und nimmt überall entgegengesetzte Zeichen, in so fern es nöthig ist, um das erste Glied positiv zu machen, so erhält man

$$x^3 - 7x - 7,\ 3x^2 - 7 \text{ und } 6x.$$

Um diese Grössen alle positiv zu machen, muss man $x = 4$ setzen. In Brüchen ist dazu $x = 3\frac{1}{10}$ hin-

Differenzen der Wurzeln.

länglich, also ist $\frac{31}{10}$ grösser als alle negative Wurzeln der Gleichung, wenn man sie positiv nimmt.

Nun verwandle man die Grösse X durch $+\frac{1}{x}$ statt x. Nachdem sie mit x^3 multiplicirt worden, um die Potenzen mit negativen Exponenten wegzuschaffen, erhält man, wenn man noch mit dem Coefficienten des ersten Gliedes 7 dividirt,

$$x^3 - x^2 + \tfrac{1}{7},$$

wovon die beiden nächsten Ableitungen

$$3x^2 - 2x \text{ und } 6x - 2$$

sind, welche für irgend einen Werth von X positiv seyn sollen. Sie sind es für $x = 1$; auch für die noch kleinere Zahl $\frac{3}{4}$. Also ist $\frac{4}{3}$ kleiner als die positive Wurzel.

Setzt man endlich $-x$ statt $+x$ und verändert zugleich in der ersten und dritten Grösse alle Zeichen, um die ersten Glieder positiv zu machen, so erhält man

$$x^3 + x^2 - \tfrac{1}{7},\ 3x^2 + 2x \text{ und } 6x + 2,$$

welche Grössen, wie leicht zu sehen, alle positiv sind, wenn man $x = \frac{1}{3}$ setzt, woraus folgt, dass die Zahl 3 kleiner ist, als die negativen Wurzeln der Gleichung, positiv genommen.

Die Grenzen der positiven Wurzeln der gegebenen Gleichung sind also $\frac{4}{3}$ und 2, und die Grenzen der negativen Wurzeln, wenn man sie positiv nimmt, 3 und $\frac{31}{10}$.

Man kann also zunächst $\frac{4}{3}$ statt x in die positi-

Ueber die Grenzen der

ven, und 2 statt x in die negativen Glieder der beiden Grössen

$$\frac{27x^2 + 42x - 126}{7} \text{ und } \frac{6x^2 + 9x - 28}{7}$$

setzen, welches $-\frac{22}{7}$ und $-\frac{16}{21}$ giebt. Da das erste von diesen beiden Resultaten das grössere ist, so ist es gut, wenn man zusieht, ob man eine kleinere Grösse erhält, wenn man alle Zeichen der ersten Grösse verändert, welches $\frac{-27x^2 - 42x + 126}{7}$ giebt, und dann $\frac{4}{3}$ in die positiven und 2 in die negativen Glieder statt x setzt. Allein dieses giebt $-\frac{174}{7}$, welches im Gegentheil grösser ist.

Man setze nun in die obigen Grössen $-x$ statt $+x$, wodurch dieselben in

$$\frac{27x^2 - 42x - 126}{7} \text{ und } \frac{6x^2 - 9x - 28}{7}$$

übergehen. In diese Grössen setze man, in die positiven Glieder 3 und in die negativen Glieder $\frac{34}{10}$ statt x. Dieses giebt $-\frac{66}{35}$ und $-\frac{19}{70}$. Da das Resultat aus der ersten Grösse kleiner ist als alle vorher gefundenen, so ist es unnöthig, durch Verwechselung der Zeichen dieser Grössen noch ein anderes zu suchen.

Da $-\frac{22}{7}$ das grösste negative Resultat ist, so ist die gesuchte Grenze $L = \frac{22}{7} + 1$ und folglich $\Delta = \frac{1}{L} = \frac{7}{29}$, und diese Grösse ist kleiner als die kleinste Differenz zwichen den Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Differenzen der Wurzeln.

Durch die Differenzen-Gleichung selbst fanden wir $\Delta = \frac{1}{2}$ (§. 27.), woraus man sieht, dass die vorige Methode eine Grenze giebt, die ein wenig kleiner ist, dass aber die Differenz selbst, grösser ist. Uebrigens gewinnt man zwar durch das obige Verfahren bei Gleichungen des dritten Grades, wegen der Weitläuftigkeit der Rechnung, wenig. Anders verhält es sich dagegen bei Gleichungen von höheren Graden. Denn die Zahl der Operationen bei dem obigen Verfahren steigt nur in gleichem Verhältnisse mit dem Grade der Gleichung; bei der Berechnung der Differenzen-Gleichung dagegen und der gesuchten Grenze durch dieselbe, im Verhältniss des Quadrates der Ordnungs-Zahl der gegebenen Gleichung.

Fünfter Zusatz.

Ueber die Newtonsche Näherungs-Methode.

111.

Da die Newtonsche Näherungs-Methode der Auflösung numerischer Gleichungen, ihrer Einfachheit wegen, die bekannteste und gebräuchlichste ist, so ist es gut, den Grad ihrer Genauigkeit näher zu untersuchen.

Es sey die allgemeine Gleichung des *m* ten Grades

277. $x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - \dots = 0$

gegeben, von welcher eine Wurzel gesucht wird. Die Newtonsche Näherungs-Methode verlangt, dass man schon eine Zahl kenne, welche der gesuchten Wurzel nahe kommt. Bezeichnet man dieselbe durch *a*, so setzt man

278. $x = a + p.$

Dieses substituirt giebt eine transformirte Gleichung in *p*, welche, wenn man von ihrem letzten Gliede anfängt,

279. $X = Yp + Zp^2 + Vp^3 \dots + p^m = 0$

Näherungs-Methode.

ist, wo die Grössen X, Y, Z.... Functionen von a sind, die sich unmittelbar durch die Ausdrücke des achten Paragraphs finden lassen, wenn man in dieselben a statt x setzt. Es ist nämlich

$$280.\ \begin{cases} X = a^m - A a^{m-1} + B a^{m-2} - C a^{m-3} \dots \\ Y = m a^{m-1} - (m-1) A a^{m-2} + (m-2) B a^{m-3} - \dots \end{cases}$$
etc.

Da die Differenz p zwischen dem wahren Werthe der gesuchten Wurzel und dem dafür angenommenen Werthe a sehr klein seyn soll, so sind die Potenzen p^2, p^3.... gegen p sehr klein, folglich sind die Glieder mit diesen Potenzen gegen die ersten Glieder $X + Yp$ sehr klein, indem die Coefficienten Z, V...., welche Functionen von a ohne Nenner sind, nie sehr gross seyn können. Reducirt man also die ganze Gleichung [(279.)] auf diese beiden Glieder [*also auf* $X + Yp = 0$ *indem man die übrigen Glieder als sehr klein weglässt*], so erhält man daraus Näherungsweise einen Werth von p, welcher

$$281.\ p = -\frac{X}{Y}$$

ist. Bezeichnet man diesen Werth von p durch b, so kann man auf dieselbe Weise in die Gleichung mit p, $b + q$ statt p setzen, und in die entstehende Gleichung mit q die Glieder mit der zweiten und mit den höhern Potenzen von q weglassen. Reducirt man wieder diese Gleichung auf ihre beiden ersten Glieder, also auf eine Gleichung von der Form $(X) + (Y) q = 0$, so erhält man

Ueber die Newtonsche

$$282. \quad q = -\frac{(X)}{(Y)}.$$

Bezeichnet man diese Grösse durch c und setzt in die zweite verwandelte Gleichung $c + r$ statt q, so erhält man eine neue Gleichung in r, woraus sich Näherungsweise der Werth von r finden lässt u. s. w.

Durch dieses Verfahren findet man für x Näherungsweise folgende Werthe

$$a$$
$$a + b$$
$$a + b + c$$
$$etc.$$

112.

Dieses ist das Verfahren, wie es Newton in seiner Fluxions-Methode lehrt. Es ist zu bemerken, dass man die Wiederholung der Transformation der Gleichungen ersparen kann. Denn da die transformirte Gleichung mit p das Resultat der Substitution von $a + p$ statt x in die Gleichung mit x, die transformirte Gleichung mit q das Resultat der Substitution von $b + q$ statt p in die Gleichung mit p ist; so folgt, dass die transformirte Gleichung mit q das Resultat der unmittelbaren Substitution von $a + b + q$ statt x in die Gleichung mit x selbst ist. Sie ist also nichts anders als die erste transformirte Gleichung mit p selbst, wenn man darin q statt p, und $a + b$ statt a setzt; woraus folgt, dass man, wenn man den allgemeinen Ausdruck von p in a gefunden hat, auch sogleich denjenigen von q erhält, wenn man $a + b$ statt

Näherungs-Methode.

statt a setzt, und den Ausdruck von r, wenn man $a+b+c$ statt a setzt, u. s. w.

Setzt man daher in den Ausdruck von p durch a allgemein irgend ein Glied der, der gesuchten Wurzel sich nähernden Reihe, so erhält man die Grösse, welche zu diesem Gliede hinzugethan werden muss, um das folgende Glied zu finden.

Das auf dieser Betrachtung beruhende Verfahren ist, wie man sieht, einfacher als das Newtonsche. Dasselbe ist von Raphson in einem zu London, im Jahre 1690 gedruckten und im Jahre 1697 wieder aufgelegten Werke unter dem Titel: „Analysis aequationum universalis" angegeben. Da die Newtonsche Methode schon in der englischen Ausgabe der Algebra von Wallis vom Jahre 1685 bekannt geworden, und nachher in der lateinischen Ausgabe vom Jahre 1693 noch genauer vorgetragen war, so kann man sich wundern, dass Raphson in seinem Werke ihrer nicht gedenkt. Man muss deshalb glauben, dass er sie für völlig verschieden von der seinigen hielt. In diesem Betracht hielt ich die obige Bemerkung, dass die beiden Verfahren im wesentlichen auf Eins herauskommen und nur die Darstellung verschieden ist, für nützlich.

113.

Nun aber ist klar, dass die Genauigkeit des Verfahrens von der Bedingung abhängt, dass, wenn a einer der Wurzeln der gegebenen Gleichung nahe kommt, $a+p$ sich der nämlichen Wurzel noch mehr

Ueber die Newtonsche

nähere. Ob dieses der Fall sey, ist also zu untersuchen.

Die m Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - \ldots = 0 \quad (277.)$$

mögen α, β, $\gamma \ldots$ seyn, so kann die Gleichung, wie wir in dem zweiten Zusatze sahen, immer auf die Gestalt

$$283. \quad (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots = 0$$

gebracht werden.

Man setze hierin $a+p$ statt x und entwickele die Glieder nach Potenzen von p, so findet man für die beiden ersten Glieder $X+Yp$ folgende Werthe von X und Y:

$$284. \begin{cases} X = (a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)\ldots \\ Y = (a-\beta)(a-\gamma)\ldots \\ \quad + (a-\alpha)(a-\gamma)\ldots \\ \quad + (a-\alpha)(a-\beta)\ldots \end{cases}$$

[*Nämlich, wenn man in*

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots = 0$$

$a+p$ *statt* x *setzt, so erhält man*

$$(a-\alpha+p)(a-\beta+p)(a-\gamma+p)\ldots = 0.$$

Setzt man

$$(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)\ldots = A$$

so ist, nach dem Taylorschen Lehrsatz,

$$(a-\alpha+p)(a-\beta+p)(a-\gamma+p)\ldots$$

$$= A + p\frac{dA}{da} + \frac{p^2}{2}\frac{d^2A}{da^2}\ldots$$

$$= (a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)\ldots$$

$$+p((a-\beta)(a-\gamma)\ldots+(a-\alpha)(a-\gamma)\ldots+(a-\alpha)(a-\beta)\ldots)$$

.

Näherungs-Methode.

woraus folgt, dass die Glieder ohne p,

$$X = (a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma) \ldots.$$

das Glied mit p in der ersten Potenz

$$Y = (a-\beta)(a-\gamma) \ldots. + (a-\alpha)(a-\gamma) \ldots. + (a-\alpha)(a-\beta) \ldots.$$

ist u. s. w.]

Hieraus folgt

285. $$\frac{Y}{X} = \frac{1}{a-\alpha} + \frac{1}{a-\beta} + \frac{1}{a-\gamma} \ldots.,$$

und folglich [*da* $p = -\frac{X}{Y}$ *ist* (281.)]

$$p = -\frac{1}{\frac{1}{a-\alpha} + \frac{1}{a-\beta} + \frac{1}{a-\gamma} \ldots.}, \text{ oder}$$

286. $$p = \frac{1}{\frac{1}{\alpha-a} + \frac{1}{\beta-a} + \frac{1}{\gamma-a} \ldots.}.$$

Die gesuchte Wurzel sey α, und a eine Zahl, die ihr in plus oder minus nahe kommt, so ist $\alpha - a$ die Zahl, um welche a kleiner oder grösser ist als die Wurzel α; $\alpha - a - p$ aber ist die Zahl, um welche der verbesserte Werth $a + p$ kleiner oder grösser ist als die Wurzel. Ist also das Verfahren gut, so muss $\alpha - a - p$, abgesehen vom Zeichen, allemal kleiner seyn als $\alpha - a$; folglich die Grösse $\frac{1}{\alpha - a - p}$, abgesehen vom Zeichen, allemal grösser als $\frac{1}{\alpha - a}$.

114.

Man setze, der Kürze wegen,

287. $$\frac{1}{\beta-a} + \frac{1}{\gamma-a} \ldots. = R$$

so giebt die Gleichung (286.)

$$288.\quad \alpha - a - p = \alpha - a - \frac{1}{\frac{1}{\alpha - a} + R} = \frac{R(\alpha - a)}{\frac{1}{\alpha - a} + R},$$

also

$$289.\quad \frac{1}{\alpha - a - p} = \frac{\frac{1}{\alpha - a} + R}{R(\alpha - a)} = \frac{1}{\alpha - a} + \frac{1}{(\alpha - a)^2 R}.$$

Daraus folgt, dass, wenn R und $\alpha - a$ einerlei Zeichen habeu, auch $\alpha - a - p$ das nämliche Zeichen hat und folglich die obige Bedingung [*dass* $\alpha - a - p$, *abgesehen vom Zeichen, allemal kleiner ist als* $\alpha - a$] erfüllt wird. [*Ist nämlich* $\alpha - a$ *positiv, und folglich nach der Voraussetzung auch* R *positiv, so ist in* (288.) *Zähler und Nenner positiv, und folglich auch* $\alpha - a - p$ *ebenfalls positiv. Ist* $\alpha - a$ *negativ, und folglich auch* R *negativ, so ist in* (288.) *der Zähler positiv und der Nenner negativ, also* $\alpha - a - p$, *wie* $\alpha - a$, *negativ. Im ersten Falle, wenn alle drei Grössen* $\alpha - a$, R *und* $\alpha - a - p$ *positiv sind, ist nach* (289.) $\frac{1}{\alpha - a - p}$ *nothwendig grösser als* $\frac{1}{\alpha - a}$, *weil* $\frac{1}{(\alpha - a)^2 R}$ *positiv ist, also ist* $\alpha - a - p < \alpha - a$. *Im zweiten Falle, wenn alle drei Grössen* $\alpha - a$, R *und* $\alpha - a - p$ *negativ sind, findet das nämliche Statt, weil alsdann* $\frac{1}{(\alpha - a)^2 R}$ *negativ ist. Also ist immer* $\alpha - a - p < \alpha - a$, *abgesehen vom Zeichen, wenn* R *und* $\alpha - a$ *einerlei Zeichen haben.*]

Näherungs-Methode.

Haben dagegen die Grössen $\alpha - a$ und R entgegengesetzte Zeichen, so muss, wenn die Bedingung Statt finden soll, abgesehen vom Zeichen,

$$290.\quad \frac{1}{(\alpha - a - p)^2} > \frac{1}{(\alpha - a)^2}$$

seyn. [*Die Erhebung zum Quadrat ist nöthig, damit die Zeichen nicht in Betracht kommen.*] Nun aber giebt die Gleichung (289.)

$$291.\quad \frac{1}{(\alpha - a - p)^2} = \frac{1}{(\alpha - a)^2} + \frac{2}{(\alpha - a)^3 R} + \frac{1}{(\alpha - a)^4 R^2};$$

also müsste die Bedingung

$$\frac{2}{(\alpha - a)^3 R} + \frac{1}{(\alpha - a)^4 R^2} > 0,$$

oder [$\frac{2(\alpha - a) R + 1}{(\alpha - a)^4 R^2} > 0$, *oder weil der Nenner immer positiv ist (anders würde der Schluss nicht gelten)*]

$$292.\quad 2(\alpha - a) R + 1 > 0$$

Statt finden.

Da nun der Werth von R von den andern Wurzeln β, γ *etc.* abhängt, welche noch unbekannt sind, so ist es schwer, ja vielleicht unmöglich, a priori ein Kennzeichen zu finden, ob die Bedingung erfüllt wird oder nicht.

Es lassen sich auch a posteriori Gleichungen aufstellen, für welche die Bedingung nicht Statt findet. Man darf nur die Wurzeln β, γ *etc.* so annehmen, dass einige ihrer Differenzen $\beta - \alpha$, $\gamma - \alpha$.... sehr klein sind und entgegengesetzte Zeichen haben, und wenn z. B. β und γ unmögliche Grössen und von

der Form $\pi + \varrho\sqrt{-1}$ und $\pi - \varrho\sqrt{-1}$ sind, so darf man nur π wenig von a verschieden und ϱ sehr klein annehmen. Alsdann entfernt sich der verbesserte Werth $a + p$ von dem wahren Werthe der Wurzel α, anstatt sich ihm zu nähern.

115.

Nur im ersten Falle [*wenn* $\alpha - a$ *und* R *einerlei Zeichen haben*] findet daher ein sicheres Kennzeichen des guten Erfolges des Verfahrens Statt. Wenn die Grösse a kleiner oder grösser als alle die Wurzeln α, β, γ der gegebenen Gleichung ist, so hat die Grösse R, wenn man, wie gehörig, negative Grössen kleiner als positive, und grössere negative Grössen kleiner als kleinere betrachtet, nothwendig mit $\alpha - a$ einerlei Zeichen. [*Denn alsdann haben die Grössen* $\beta - a$, $\gamma - a$ *etc. alle das nämliche Zeichen wie* $\alpha - a$, *folglich hat auch* $R = \frac{1}{\beta - a} + \frac{1}{\gamma - a} \ldots$ (287.) *eben das Zeichen wie* $\alpha - a$.] Befinden sich unter den Werthen der Wurzeln unmögliche Grössen von der Form $\pi + \varrho\sqrt{-1}$ und $\pi - \varrho\sqrt{-1}$, so geben dieselben in dem Ausdruck von R (287.) Glieder wie $\frac{1}{\pi - a + \varrho\sqrt{-1}} + \frac{1}{\pi - a - \varrho\sqrt{-1}}$, welches gleich $\frac{2(\pi - a)}{(\pi - a)^2 + \varrho^2}$ ist, welche Grösse, wenn a zugleich kleiner oder grösser als π ist, ebenfalls mit $\alpha - a$ einerlei Zeichen hat.

Hieraus folgt, dass das Resultat des Newtonschen

Näherungs-Methode.

Verfahrens nur dann sicher ist, wenn der näherungsweise Werth a der einen Wurzel grösser oder kleiner ist, als alle reelle Wurzeln der Gleichung in allen reellen Theilen der unmöglichen Wurzeln zugleich, und dass also das Verfahren nicht unbedenklich zur Entwickelung der grössten und kleinsten Wurzeln einer Gleichung mit lauter reellen Wurzeln, oder der imaginairen Wurzeln, wenn deren reelle Theile kleiner sind als die grösste reelle Wurzel, oder grösser als die kleinste reelle Wurzel, angewandt werden darf.

Damit sich die verbesserten Werthe alle dem wahren Werthe der gesuchten Wurzel allmählig nähern, muss man zum ersten Näherungs-Werthe eine Grösse nehmen, die grösser ist als die grösste Wurzel, wenn man diese grösste Wurzel sucht, oder eine Grösse die kleiner ist als die kleinste Wurzel, wenn man diese letzte sucht. Alsdann sind alle nach und nach verbesserten Werthe ebenfalls grösser als die grösste, oder kleiner als die kleinste Wurzel, und die für die Convergenz nothwendige Bedingung findet für alle diese Werthe Statt, weil alsdann R und $\alpha - a$ immer einerlei Zeichen haben, wenn man für a jeden dieser Werthe setzt.

116.

Sind die Wurzeln der Gleichung reell, so lässt sich leicht erkennen, ob der erste, sich nähernde Werth a grösser oder kleiner ist als alle Wurzeln. Denn bringt man die Gleichung auf die Gestalt

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \ldots = 0$$

Ueber die Newtonsche

und setzt $a + p$ statt x, so erhält man

$$(p + a - \alpha)(p + a - \beta)(p + a - \gamma) \ldots = 0,$$

wo $a - \alpha$, $a - \beta$, $a - \gamma \ldots$ im ersten Falle lauter positive, im andern Falle lauter negative Grössen sind. Im ersten Falle also muss die transformirte Gleichung mit p lauter positive, im andern Falle abwechselnd positive und negative Glieder haben.

Hat umgekehrt die transformirte Gleichung mit p lauter positive Glieder, so ist klar, dass es keinen positiven Werth von p giebt, welcher der Gleichung genugthut, [*weil für jeden beliebigen positiven Werth von p der Theil der Gleichung rechterhand immer eine positive Grösse, und nie Null ist;*] die reellen Werthe von p sind also alsdann nothwendig negativ. Da nun die Wurzeln der Gleichung mit p, $\alpha - a$, $\beta - a$, $\gamma - a \ldots$ sind, so müssen alle diese Grössen negativ oder unmöglich seyn. Die Grösse a muss also nothwendig grösser als alle reelle Wurzeln der Gleichung seyn, selbst wenn dieselbe imaginaire Wurzeln hätte.

Eben so lässt sich zeigen, dass die Grösse a, wenn die Glieder der transformirten Gleichung mit p abwechselnd positiv und negativ sind, nothwendig kleiner als alle reelle Wurzeln der Gleichung seyn muss, dieselben mögen unmögliche Wurzeln haben, oder nicht.

117.

Hat aber die Gleichung imaginaire Wurzeln, so kann man sich nicht eben so versichert halten, dass

Näherungs-Methode.

die Grösse a zugleich grösser oder kleiner ist, als die reellen Theile der Wurzeln. Es ist auch nicht wohl einzusehen, wie man dieses anders erkennen wolle, als durch die Gleichung, deren Wurzeln die reellen Theile der unmöglichen Wurzeln sind. Ist $\beta = \pi + \varrho \sqrt{-1}$ und $\gamma = \pi - \varrho \sqrt{-1}$, so ist $\pi = \frac{\beta + \gamma}{2}$. Die Gleichung, deren neue Wurzel π wäre, würde also diejenige seyn, deren Wurzeln die halben Summen der Wurzeln der gegebenen Gleichung, zu zweien genommen, sind. Diese steigt, der Zahl der möglichen Verbindungen zu Folge, auf den $\frac{m(m-1)}{2}$ten Grad.

Hat man diese Gleichung durch die Ausdrücke im dritten Zusatze aufgestellt, so kann man darin $a + z$ an die Stelle der unbekannten Grösse setzen. Wechseln die Glieder der umgeformten Gleichung der Reihe nach die Zeichen, so ist man versichert, dass die Zahl a grösser oder kleiner als alle Werthe von π ist, und folglich auch grösser oder kleiner als alle reellen Theile der imaginairen Wurzeln.

118.

Newton hat seine Methode auf die Gleichung

$$x^3 - 2x - 5 = 0,$$

welche wir in (§. 25.) auflöseten, angewendet. Er setzt zunächst im vierten Abschnitte $a = 2$, und folglich $2 + p$ statt x, welches die transformirte Gleichung

$$0 = -1 + 10p + 6p^2 + p^3$$

giebt, woraus er $p = \frac{1}{10} = 0{,}1$ schliesst. Er setzt

Ueber die Newtonsche

nun $p = 0{,}1 + q$ und findet die neue transformirte Gleichung

$$0 = 0{,}061 + 11{,}23q + 6{,}3q^2 + q^3,$$

woraus er $q = -\frac{0{,}061}{11{,}23} = -0{,}0054\ldots$ findet. Er setzt ferner $q = -0{,}0054 + r$, welches die transformirte Gleichung

$$0 = 0{,}000541708 + 11{,}16196r + 6{,}3r^2 + r^3$$

giebt, woraus $r = -\frac{0{,}000541708}{11{,}16196} = -0{,}00004853$ folgt u. s. w.

Die dem wahren Werthe von x sich nähernden Zahlen würden also

$$2;\ 2{,}1;\ 2{,}0946;\ 2{,}09455147$$

seyn, von welchen die letzte bis auf die letzte Decimal-Stelle genau ist. [*Man sehe* (§. 25.).]

In diesem Falle convergirt die Reihe, wie man sieht. Man kann sich auch durch das, was oben gezeigt, a priori überzeugen, dass es in dem gegenwärtigen Falle so seyn muss.

Denn zu Folge (§. 25.) sind die beiden andern Wurzeln der Gleichung unmöglich, und es ist, wenn man sie gleich $\pi \pm \varrho\sqrt{-1}$ setzt, ungefähr $\varrho^2 = \frac{160}{4\cdot 31} = \frac{40}{31}$ und $\pi = -\frac{15}{8\varrho^2 + 4} = -\frac{15\cdot 31}{4\cdot 111} = -\frac{465}{444}$. Man erhält also, weil ausser der gesuchten Wurzel α nur diese beiden unmöglichen Wurzeln vorhanden sind, in diesem Falle

$$R = \frac{2(\pi - a)}{(\pi - a)^2 + \varrho^2}.$$

Näherungs-Methode.

Da nun $a = 2$ ist, so ist $\pi - a = \frac{1353}{444}$; α aber ist sehr nahe gleich 2,0945, also ist $\alpha - a = 0{,}0945\ldots$, woraus man sieht, dass R und $\alpha - a$ entgegengesetzte Zeichen haben, und dass also, wenn die erste Verbesserung des für die Wurzel α vorausgesetzten Werthes a richtig seyn soll, die Bedingung $2(\alpha - a)R + 1 > 0$ Statt finden muss. Nun ist $R = -0{,}6675$, also $2(\alpha - a)R = -0{,}1244$, so dass die nothwendige Bedingung vollkommen erfüllt wird. Man ist also auch versichert, dass der erste verbesserte Werth der Wurzel 2,1 dem wahren Werthe derselben näher kommt. Setzt man diesen Werth statt a, so erhält man $\alpha - a = -0{,}0055$, also haben $\alpha - a$ und R nur einerlei Zeichen, und die folgenden Verbesserungen sind alle wirkliche Näherungen an den wahren Werth der gesuchten Wurzel.

Näherung durch

Sechster Zusatz.

Ueber das auf rücklaufende Reihen beruhende Näherungs-Verfahren.

119.

Wir wollen wiederum die Gleichung

293. $x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} \ldots = 0$ (277.)

annehmen, deren Wurzeln in dem zweiten Zusatze durch α, β, γ.... bezeichnet wurden, so findet, nach der Natur der Gleichungen, für jeden beliebigen Werth von x die identische Gleichung

294. $x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} \ldots$
$\doteq (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) \ldots$

Statt.

Die Identität dieser Gleichung findet auch noch Statt, wenn man $x+k$ statt x setzt, was auch x und k seyn mögen. Und wenn man das Resultat der Substitution entwickelt, so geben die Glieder mit k, mit k^2 u. s. w. andere identische Gleichungen. Diese Gleichungen sind solche, welche wir in der Functionen-Theorie abgeleitete Gleichungen nannten. [*Obgleich die beiden Grössen*

rücklaufende Reihen.

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} \ldots \text{ und}$$

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots.$$

keinesweges für jeden beliebigen Werth von x gleich Null sind, sondern nur für $x = \alpha$, $x = \beta$, $x = \gamma$, $x = \delta$ etc., so können sie doch einander gleich gesetzt werden. Es wird also eigentlich die Gleichung für jedes beliebige x (294.) vorausgesetzt, in welcher dann $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots.$ diejenigen besondern Werthe von x sind, für welche der Theil der Gleichung linkerhand, so wie es derjenige rechterhand ist, Null ist. Dass das letzte der Fall sey, ist leicht zu zeigen. Denn bezeichnet man die Verbindungen der m Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots.$ zu einer durch (1), zu zweien durch (2), zu dreien durch (3) u. s. w., so erhält man bekanntlich, wenn man die Grösse $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots.$ entwickelt, das heisst die Factoren wirklich in einander multiplicirt,

$$x^m - x^{m-1}(1) + x^{m-2}(2) \ldots. \pm (m).$$

Es wird also, ehe man noch den Werth der Grössen $\alpha, \beta, \gamma \ldots.$ und folglich der Grössen (1), (2), (3) kennt, die Gleichung

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots. \pm Ox \mp M$$

$$= x^m - (1)x^{m-1} + (2)x^{m-2} \ldots. (o)\,x \mp (m)$$

für jeden beliebigen Werth von x vorausgesetzt. Da nun diese Gleichung für jeden beliebigen Werth von x gelten soll, so gilt sie auch für $x = 0$, welches

Näherung durch

$$(m) = M$$

giebt. Lässt man $(m) = M$ *aus der Gleichung weg und dividirt durch* x, *so erhält man*

$$x^{m-1} - Ax^{m-2} + Bx^{m-3} \ldots \pm O$$
$$= x^{m-1} - Ax^{m-2} + Bx^{m-3} \ldots \pm o,$$

welches für $x = 0$,

$$O = o$$

giebt u. s. w. Die Grössen $(1), (2), (3) \ldots (m)$ *sind also*

$$(1) = A,\ (2) = B,\ (3) = C \ldots (m) = M.$$

Nun sind die Grössen $A, B, C \ldots M$ *den Verbindungen der* ***Wurzeln*** *der Gleichung* $x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots \mp M = 0$, *oder denjenigen Werthen von* x, *für welche die Grösse* $x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots \mp M$ *gleich Null ist, gleich; also sind die noch unbekannten Grössen* $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ *in der vorausgesetzten Gleichung* (294.) *nichts anders als die* ***Wurzeln*** *der Gleichung* (293.)]

Die erste von (294.) abgeleitete Gleichung, ist

295. $mx^{m-1} - (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} - \ldots$
$= (x-\beta)(x-\gamma)\ldots + (x-\alpha)(x-\gamma)\ldots + (x-\alpha)(x-\beta)\ldots$

Dividirt man dieselbe durch die vorausgesetzte Gleichung (294.), so erhält man

296. $$\frac{mx^{m-1} - (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} \ldots}{x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots}$$
$$= \frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} + \frac{1}{x-\gamma} \ldots,$$

welche Gleichung ebenfalls identisch für jeden Werth von x gilt. Sie gilt also noch eben so, wenn man die beiden Glieder in Reihen entwickelt, die nach den Potenzen von k mit positiven oder negativen Exponenten fortschreiten.

120.

Wir wollen zuerst die Entwickelung nach Potenzen mit negativen Exponenten machen. Der Bruch im ersten Theile der Gleichung wird die Form

$$297.\quad \frac{P}{x} + \frac{Q}{x^2} + \frac{R}{x^3} + \frac{S}{x^4} \ldots\ldots$$

haben, und um die Werthe der Coefficienten P, Q, $R \ldots\ldots$ zu finden, darf man nur die Grösse (297.) mit dem Nenner $x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots\ldots$ multipliciren und die Glieder des Products mit denen des Zählers $mx^{m-1} - (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} \ldots\ldots$ vergleichen. Dieses giebt

[
$$\begin{aligned} & Px^{m-1} - APx^{m-2} + BPx^{m-3} - CPx^{m-4} \ldots\ldots \\ & \quad + Qx^{m-2} - AQx^{m-3} + BQx^{m-4} \ldots\ldots \\ & \quad\quad + Rx^{m-3} - ARx^{m-4} \ldots\ldots \\ & \quad\quad\quad + Sx^{m-4} \ldots\ldots \\ & = mx^{m-1} - (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} \\ & \quad - (m-3)Cx^{m-4} \ldots\ldots, \end{aligned}$$

woraus folgt]

Näherung durch

298. $$\begin{cases} P = m \\ Q = AP - (m-1)A \\ R = AQ - BP + (m-2)B \\ S = AR - BQ + CP - (m-3)C \end{cases}$$

.

Die Reihe der Grössen P, Q, R, S.... ist also, wie hieraus erhellt, nach dem mten Gliede, eine rücklaufende mit der Scale A, $-B$, $+C$, $-D$ *etc.*

Entwickelt man auf gleiche Weise in der Gleichung (296.) das zweite Glied $\left[\frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} + \frac{1}{x-\gamma} \ldots\right]$, so erhält man

$$\left[\frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\alpha^2}{x^3} + \frac{\alpha^3}{x^4} \ldots\right.$$
$$+ \frac{1}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\beta^2}{x^3} + \frac{\beta^3}{x^4} \ldots$$
$$+ \frac{1}{x} + \frac{\gamma}{x^2} + \frac{\gamma^2}{x^3} + \frac{\gamma^3}{x^4} \ldots$$
$$\left. \ldots\ldots\ldots\ldots, \text{ oder}\right]$$

299. $$\frac{m}{x} + (\alpha+\beta+\gamma\ldots)\frac{1}{x^2} + (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\ldots)\frac{1}{x^3} + (\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\ldots)\frac{1}{x^4}\ldots$$

Vergleicht man die Coefficienten zu gleichen Potenzen von x in den beiden Grössen [(297. *und* 299.), *welche zu Folge* (296.) *einander gleich sind*], so erhält man

300. $$\begin{cases} P = m \\ Q = \alpha + \beta + \gamma \ldots \\ R = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \ldots \\ S = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \ldots \end{cases}$$

.

[*Aus*

rücklaufende Reihen.

[*Aus der Gleichung*

$$\frac{P}{x}+\frac{Q}{x^2}+\frac{R}{x^3}\ldots=\frac{m}{x}+\frac{\alpha+\beta+\gamma\ldots}{x^2}+\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^3\ldots}{x^3}\ldots$$

erhält man $P=m$, *wenn man die Gleichung mit* x *multiplicirt und dann* $x=\infty$ *setzt. Lässt man darauf* $\frac{P}{x}=\frac{m}{x}$ *weg, multiplicirt mit* x^2 *und setzt von Neuem* $x=\infty$, *so findet man* $Q=\alpha+\beta+\gamma\ldots$ *u. s. w.*]

Allgemein also ist das μte Glied nach dem Gliede Q, gleich

$$\alpha^\mu+\beta^\mu+\gamma^\mu\ldots$$

Dieses ist der Ausdruck des allgemeinen Gliedes der Reihe.

Hierin liegt der einfachste Beweis des von Newton gefundenen Gesetzes der Ausdrücke der Potenzen der Wurzeln einer gegebenen Gleichung. Die obigen Ausdrücke dienen aber auch, um sich dem Werthe der grössten von den Wurzeln α, β, $\gamma\ldots$ zu nähern. In der That ist leicht zu sehen, dass, wenn alle Wurzeln der Gleichung reell sind und α z. B. ist die grösste Wurzel, sie sey positiv oder negativ, dass dann die μte Potenz derselben α^μ die gleichen Potenzen der übrigen Wurzeln, und selbst die Summe dieser Potenzen, um so mehr übertreffen wird, je grösser μ ist; woraus folgt, dass, wenn T und V die folgenden Glieder der Reihe P, Q, $R\ldots$ sind, der Ausdruck $\frac{V}{T}\left[=\frac{\alpha^{\mu+1}+\beta^{\mu+1}+\gamma^{\mu+1}\ldots}{\alpha^\mu+\beta^\mu+\gamma^\mu}\right.$,

Näherung durch

welcher, wenn $\alpha^{\mu+1}$ *als sehr gross gegen* $\beta^{\mu+1}$, $\gamma^{\mu+1}$, *und* α^{μ} *als sehr gross gegen* β^{μ}, γ^{μ} ... *betrachtet wird,* $\frac{\alpha^{\mu+1}}{\alpha^{\mu}} = \alpha$ *giebt*] dem Werthe der Wurzel α um so näher kommen wird, je weiter die Glieder V, T von dem Anfange der Reihe P, Q, R.... entfernt sind.

121.

Wenn unter den Wurzeln β, γ.... imaginaire Wurzeln sind, z. B.

302. $\beta = \pi + \varrho\sqrt{-1}$, $\gamma = \pi - \varrho\sqrt{-1}$,

so setze man

303. $\sqrt{(\pi^2 + \varrho^2)} = \Pi$, und $\frac{\varrho}{\pi} = \operatorname{tang}\varphi$.

Dieses giebt

304. $\begin{cases} \beta = \Pi(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}) \text{ und} \\ \gamma = \Pi(\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1}) \end{cases}$

[*wie leicht zu sehen, denn aus* (304.) *folgt* $\beta\gamma = \Pi^2(\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2) = \Pi^2$, *und* $\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma} = \frac{2\Pi\sin\varphi\sqrt{-1}}{2\Pi\cos\varphi} = \operatorname{tang}\varphi\sqrt{-1}$. *Das nämliche folgt aus* (302. *und* 303.)].

Nun ist nach einem bekannten Lehrsatze

305. $\begin{cases} \beta^{\mu} = \Pi^{\mu}(\cos\mu\varphi + \sin\mu\varphi\sqrt{-1}) \\ \gamma^{\mu} = \Pi^{\mu}(\cos\mu\varphi - \sin\mu\varphi\sqrt{-1}); \end{cases}$

also ist

306. $\beta^{\mu} + \gamma^{\mu} = 2\Pi^{\mu}\cos\mu\varphi$.

In so fern also die Wurzel ∞ zu gleicher Zeit grös-

ser ist als Π oder $\sqrt{(\pi^2 + \varrho^2)}$ (303.), das heisst, grösser als $\sqrt{(\beta\gamma)}$, so ist auch die μte Potenz von α, α^μ, grösser als die Summe der μten Potenzen von β und γ, $\beta^\mu + \gamma^\mu$.

Das Verfahren findet also in Betracht der imaginairen Wurzeln blos dann nicht Statt, wenn unter denselben solche sind, die, wenn man zwei zusammengehörige in einander multiplicirt, ein Product geben, welches grösser ist als das Quadrat der grössten reellen Wurzel. In einem solchen Falle divergirt die Reihe, statt zu convergiren und am Ende in eine geometrische Reihe überzugehen. [*Es scheint, dass nicht sowohl* $\alpha > \Pi$, *sondern vielmehr* $\alpha^\mu > 2\Pi^\mu > 2(\beta\gamma)^{\frac{\mu}{2}}$ *seyn müsse, wo* α^μ *grösser seyn soll als* $\beta^\mu + \gamma^\mu$, *weil* $\cos \mu\varphi = 1$ *seyn kaun.*]

122.

Dieses Verfahren kommt offenbar mit demjenigen von Daniel Bernoulli überein, welches derselbe auf die rücklaufenden Reihen gründete, und welches Euler ausführlich in seiner Einleitung [*in die Analysis des Unendlichen im* 17*ten Kapitel des ersten Bandes*] mitgetheilt hat. Bei diesem letztern nimmt man zum Zähler des Bruchs, aus welchem die Reihe entsteht, ein beliebiges Polynom an, welches um einen Grad niedriger ist, als der Nenner des Bruchs, wodurch die m ersten Glieder der Reihe gänzlich unbestimmt bleiben. Dieser Bruch wird dann in die

Näherung durch

einfachen Brüche $\frac{a}{x-\alpha}+\frac{b}{x-\beta}+\frac{c}{x-\gamma}\ldots$ zerlegt, woraus für die Glieder der Reihe der allgemeine Ausdruck $a\alpha^{\mu}+b\beta^{\mu}+c\gamma^{\mu}\ldots$ entsteht, welcher immer, wenn die Wurzel α viel grösser ist als alle übrige, für den der Wurzel α nahe kommenden Werth $\frac{V}{T}$ giebt, was auch der Coefficient a seyn mag. Die Unbestimmtheit der ersten Glieder der Reihe ist eben so nachtheilig als vortheilhaft; denn wenn z. B. zwei Wurzeln α, β einander gleich sind, so nehmen die beiden Glieder $a\alpha^{\mu}+b\beta^{\mu}$ im Allgemeinen die Form $(a'+b'\mu)\alpha^{\mu}$ an, und wenn die drei Wurzeln α, β, γ gleich sind, so nehmen die drei Glieder $a\alpha^{\mu}+b\beta^{\mu}+c\gamma^{\mu}$ die Form $(a'+b'\mu+c'\mu^2)\alpha^{\mu}$ an u. s. w.; woraus leicht zu sehen, dass sich die Reihe, wenn die Wurzel α zweifach, dreifach u. s. w. da ist, viel langsamer einer geometrischen Reihe nähert. Nimmt man dagegen, wie oben geschehen, die erste Ableitung des Nenners zum Zähler an, so sind alle Coefficienten a, b, c gleich Eins [(296.)], und, wenn z. B. die Wurzeln α und β gleich sind, so geben die beiden Glieder $\alpha^{\mu}+\beta^{\mu}$ blos $2\alpha^{\mu}$ u. s. w., so dass die Gleichheit auf die Convergenz der Reihe weiter keinen Einfluss hat.

123.

Um ein Beispiel zu geben, wollen wir das Eulersche, in §. 346. der Einleitung, nehmen. Die aufzulösende Gleichung ist

rücklaufende Reihen.

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 0.$$

Euler setzt die ersten drei Glieder 0, 1 und 3, und stellt, vermöge der Scale 3, 0, —4, die rücklaufende Reihe

1, 3, 9, 23, 57, 135, 313, 711 *etc.*

auf. Er bemerkt nun, dass der Quotient jedes Gliedes durch das vorhergehende immer grösser als die Wurzel 2 ist, welche zweifach und zugleich die grösste ist.

Wendet man die obigen Ausdrücke an, so ist

$$m = 3, \; A = 3, \; B = 0, \; C = 4 \quad (293.).$$

Alle Glieder P, Q, R *etc.* haben alsdann den Factor 3. Lässt man denselben, der Kürze wegen, weg, so findet man, vermöge der nämlichen Scale, aber vom Gliede 1, 1, 3 anfangend, die Reihe

1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341 *etc.*

Dividirt man jedes Glied dieser Reihe durch das Vorhergehende, so nähern sich die Quotienten, wie man sieht, sehr schnell der Zahl 2.

124.

Wir entwickelten oben die identische Gleichung

$$\frac{n \,.\, x^{m-1} - \ldots.}{x^m - Ax^{m-1} + \ldots.} = \frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} \ldots. \quad (296.)$$

nach Potenzen von x mit negativen Exponenten. Wir wollen diese Gleichung nun auch nach Potenzen von x mit positiven Exponenten entwickeln.

Zu dem Ende wollen wir die letzten Glieder des Polynoms $x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots.$ durch

Näherung durch

$$307.\quad a - bx + cx^2 - dx^3 \ldots.$$

bezeichnen. Alsdann ist die Gleichung (296.) folgende:

$$308.\quad \frac{-b + 2cx - 3dx^2 + 4ex^3 - \ldots.}{a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - \ldots.} = \frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} \ldots.$$

Die Entwickelung des Bruchs linkerhand nach steigenden Potenzen von x wird eine Grösse von der Form

$$309.\quad -P_{,} - Q_{,}x - R_{,}x^2 - S_{,}x^3 \ldots.$$

geben. Multiplicirt man diese Grösse mit dem Nenner $[a - bx + cx^2 - dx^3 \ldots.]$ und vergleicht die Glieder des Resultats

$$\begin{aligned}[-aP_{,} - aQ_{,}x - aR_{,}x^2 - aS_{,}x^3 &\ldots. \\ + bP_{,}x + bQ_{,}x^2 + bR_{,}x^3 &\ldots. \\ - cP_{,}x^2 - cQ_{,}x^3 &\ldots. \\ + dP_{,}x^3 &\ldots.\end{aligned}$$

mit dem Zähler des Bruches

$$-b + 2cx - 3dx^2 + 4ex^3 \ldots.],$$

so erhält man

$$310.\quad \begin{cases} aP_{,} = b \\ aQ_{,} = bP_{,} - 2c \\ aR_{,} = bQ_{,} - cP_{,} + 3d \\ aS_{,} = bR_{,} - dQ_{,} + dP_{,} - 4e \end{cases}$$
etc.

welches eine rücklaufende Reihe mit der Scale

$$311.\quad \frac{b}{a},\ -\frac{c}{a},\ \frac{d}{a}\ \text{etc.}$$

giebt.

Das zweite Glied der Gleichung $\left[\frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} \ldots.\right]$,

rücklaufende Reihen.

auf dieselbe Weise nach steigenden Potenzen von x entwickelt, giebt

$$[-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{x}{\alpha^2}+\frac{x^2}{\alpha^3}\ldots\right)$$
$$-\left(\frac{1}{\beta}+\frac{x}{\beta^2}+\frac{x^2}{\beta^3}\ldots\right)$$
$$-\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{x}{\gamma^2}+\frac{x^2}{\gamma^3}\ldots\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

folglich] die Reihe

$$312.\left\{\begin{array}{l}-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\ldots\right)\\ -\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\ldots\right)x\\ -\left(\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}\ldots\right)x^2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$$

Setzt man nun, wie es seyn soll, die Grössen (309. und 312.) einander gleich, so erhält man

$$313.\left\{\begin{array}{l}P_{,}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\ldots\\ Q_{,}=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\ldots\\ R_{,}=\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$$

Diese Ausdrücke geben die Summe der reciproken Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Es ist klar, dass, wenn α die kleinste positive oder negative Wurzel ist, die Potenz $\frac{1}{\alpha^\mu}$ um so mehr

die gleichen Potenzen der andern Wurzeln übersteigen wird, als α kleiner ist als die andern Wurzeln $\beta, \gamma \ldots$ Wenn also $T_{,}$ und $V_{,}$ zwei auf einander folgende Glieder der Reihe $P, Q, R \ldots$ sind, so nähert sich der Quotient $\frac{T_{,}}{V_{,}}$ um so mehr dem Werthe der kleinsten Wurzel der Gleichung, je weiter die Glieder vom Anfange der Reihe entfernt sind, so dass also durch diese Reihe die kleinste Wurzel auf dieselbe Weise gefunden werden kann, wie oben, durch die Reihe $P, Q, R \ldots$, die grösste Wurzel. Von den unmöglichen Wurzeln lässt sich auf dieselbe Weise zeigen, dass sie die Näherung an die kleinste Wurzel nicht hindern, so lange nicht das Quadrat der kleinsten Wurzel zugleich kleiner ist, als alle die reellen Producte correspondirender imaginairer Wurzeln [*mit Rücksicht auf die Bemerkung* (§. 121.)].

125.

Man könnte also dieses Näherungs-Verfahren für jede reelle Wurzel einer beliebigen Gleichung anwenden, wenn man im voraus eine Zahl a kennte, welche der gesuchten Wurzel näher käme, als alle übrige Wurzeln, und zugleich näher als die Quadrat-Wurzeln aus den Producten aller correspondirenden imaginairen Wurzeln, wenn dergleichen vorhanden sind, nach Abzug von a genommen. Denn, setzt man alsdann $x = a + p$, so erhält man eine transformirte Gleichung in p, deren kleinste Wurzel auf die obige Weise gefunden werden kann, und diese

kleinste Wurzel, zu a gethan, gäbe die gesuchte Wurzel.

Die Zahlen, welche auf solche Weise den Wurzeln nahe kommen, lassen sich aber ohne das oben angegebene Verfahren nicht finden. Und sind diese Zahlen einmal bekannt, so hat das Näherungs-Verfahren des dritten Abschnitts den Vorzug. Ich bin auch blos deshalb in das vorstehende Detail eingegangen, um Nichts zu übergehen.

126.

Wenn man die gegenwärtige Methode auf das Newtonsche Beispiel anwenden will, so nehme man sogleich die transformirte Gleichung $p^3 + 6p^2 + 10p - 1$ (voriger Zusatz). Da man weiss, dass die reelle Wurzel kleiner als 0,1 ist, so folgt, dass das Product der beiden andern Wurzeln, von welchen man weiss, dass sie unmögliche Grössen sind, $> \frac{1}{0,1}$, das heisst, grösser als 10 ist, weil das letzte Glied das Product von allen drei Wurzeln ist. Man sieht daraus, dass das Quadrat der gesuchten Wurzeln viel kleiner ist als das Product der beiden unmöglichen Wurzeln. Man muss also eine rücklaufende Reihe aus dem Bruche $\frac{10 + 12p + 3p^2}{1 - 10p - 6p^2 - p^3}$ aufstellen. Dieselbe hat die Glieder 10, 112, 1183, 12512, 132330 *etc.*, welche man so weit man will, vermittelst der Scale 10, 6, 1, fortsetzen kann. Dividirt man die Glieder dieser Reihe, jedes durch das folgende, so erhält man die

Näherung durch rücklaufende Reihen.

Brüche $\frac{10}{112}$, $\frac{112}{1183}$, $\frac{1183}{12512}$ *etc.*, welche, in Decimal-Brüche verwandelt, 0,089, 0,09467, 0,094549, 0,0945515 *etc.* geben. Nun sahen wir im vorigen Zusatze, dass die Newtonsche Methode für p die convergirende Reihe 0,1, 0,0946, 0,0945514 *etc.* giebt. Man kann daraus die Uebereinstimmung der beiden Verfahren abnehmen. Wir werden in der That weiter unten zeigen, dass dieselben, obgleich auf verschiedenen Grundsätzen beruhend, auf Eins herauskommen und einerlei Resultate geben.

Siebenter Zusatz.

Ueber die Methode, Gleichungen aufzulösen, von Fontaine.

127.

Da man von dieser sonst auch wenig bekannten Methode keinen Gebrauch macht, so könnte ich dieselbe übergehen, wenn nicht der Name des Verfassers und die Art, wie er sein Verfahren ankündigt, mich verpflichteten, eine kurze Uebersicht derselben zu geben, und die Grundsätze zu untersuchen, auf welchen sie beruht. Ich gebe, sagt Fontaine, als dasjenige vollständig, was man seit der Erfindung der Algebra vergeblich suchte. Man sehe die Memoiren der Academie der Wissenschaften vom Jahre 1747. pag. 665.

Diese Methode hat zwei Theile. In dem ersten betrachtet ihr Erfinder die Gleichung als aus einfachen reellen oder imaginairen Factoren wie $x \pm a$, $x \pm a \pm b\sqrt{-1}$, eine bestimmte Zahl von reellen, positiven und ungleichen Grössen a, b, c *etc.* enthaltend, zusammengesetzt. Er geht alle mögliche Verbindungen der verschiedenen Factoren, welche

Auflösungs-Verfahren

man auf diese Weise machen kann, durch und sucht für jedes System von Factoren, in den Coefficienten der Gleichung, die demselben eigenthümlichen Bedingungen, durch welche es sich von andern unterscheidet. Er stellt auf diese Weise Tafeln auf, welche die verschiedenen Systeme der Factoren und die ihnen eigenthümlichen Bedingungen enthalten, so dass sich, wenn irgend eine Gleichung und der Werth ihrer Coefficienten in Zahlen gegeben ist, sogleich sehen lässt, welches System von Factoren für dieselbe passt. Auf diese Weise findet man sogleich, wieviel gleiche oder ungleiche, reelle, positive oder negative, oder wieviel imaginaire Wurzeln die gegebene Gleichung hat.

128.

Um Denen, welche die Sammlung der Memoiren von Fontaine nicht zur Hand haben, eine deutliche Vorstellung zu geben, will ich die Tafeln für die Gleichung des zweiten Grades hersetzen, nebst der Beschreibung des Verfahrens, durch welches der Verfasser sie aufstellt. Sodann werde ich darüber einige Bemerkungen machen.

Die Buchstaben m, n, a und b bezeichnen in den nachstehenden Ausdrücken immer positive Grössen oder Zahlen, und a wird immer grösser als b angenommen.

von Fontaine.

314. $$\begin{cases} x^2+mx+n= \begin{cases} (x+a)(x+a) & m^2-4n=0 \\ (x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1}) & m^2-2n=0 \\ (x+a)(x+b) & m^2-4n>0 \\ (x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1}) & \begin{cases} m^2-4n<0 \\ m^2-2n>0 \end{cases} \\ (a+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1}) & m^2-2n<0 \end{cases} \\ x^2+mx+n=(x+a)(x+b) \\ x^2-mx+n= \begin{cases} (x-a)(x-a) & m^2-4n=0 \\ (x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1}) & m^2-2n=0 \\ (x-a)(x-b) & m^2-4n>0 \\ (x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1}) & \begin{cases} m^2-4n<0 \\ m^2-2n>0 \end{cases} \\ (x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) & m^2-2n<0 \end{cases} \\ x^2-mx+n=(x-a)(x+b) \\ x^2+n \quad =(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1}) \\ x^2-n \quad =(x+a)(x-a) \end{cases}$$

Man erblickt in dieser Tafel erst alle mögliche Verbindungen der verschiedenen Factoren, welche nur $x\pm a$, $x\pm b$ oder $x\pm a\pm a\sqrt{-1}$, $x\pm a \pm b\sqrt{-1}$ und $x\pm b\pm a\sqrt{-1}$ seyn können.

Um zu sehen, auf welche Form sich jede Verbindung bezieht, sind die Producte entwickelt und mit den Gleichungen verglichen worden, wobei zu bemerken, dass die Grösse a immer grösser ist als b.

Bis hierher hat das Verfahren weiter keine Schwierigkeit, als dass die Rechnung weitläuftig ist. Es kommt alles darauf an, die Kennzeichen der zu jeder Verbindung gehörigen Bedingungen zu finden.

Diese Bedingungen sind zweierlei Art. Die einen

Auflösungs-Verfahren

sind durch bestimmte Gleichungen gegeben, wie $m^2 - 4n = 0$ oder $m^2 - 2n = 0$. Sie finden in dem Falle Statt, wenn man die Grösse b gleich Null oder gleich a setzt. Sie sind leicht zu finden. Denn da durch die Voraussetzungen eine der unbestimmten Grössen a und b wegfällt, so erhält man, wenn man die Glieder des Products der Factoren mit denen der Gleichung vergleicht, eine Gleichung mehr als unbestimmte Grössen vorhanden sind, so dass man durch die Elimination nothwendig eine Bedingungs-Gleichung findet. So z. B. geben die gleichen Factoren $(x+a)(x+a)$ die Bedingung $m^2 - 4n = 0$; die Factoren $(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$ geben die Bedingung $m^2 - 2n = 0$.

Aus diesen Bedingungen finden sich die übrigen, wenn man statt des Gleichheits-Zeichens die Zeichen $>$ oder $<$ setzt. Sie folgen daraus, dass eine Function der Coefficienten m und n, wenn sie für $a = b$ und $b = 0$ Null ist, grösser oder kleiner seyn muss als Null, wenn $a > b$ oder $b > 0$ ist.

Da also das System $(x+a)(x+a)$ aus dem Systeme $(x+a)(x+b)$ entsteht, wenn man $a = b$ setzt, oder aus dem Systeme $(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$ wenn man $b = 0$ setzt; so ist die Function $m^2 - 4n$, welche für jenes System verschwindet, nicht mehr gleich Null für die neuen Systeme. Man findet, dass die Function für das System $(x+a)(a+b)$ positiv, und für das System $(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$ negativ ist.

Der Verfasser nimmt allgemein an, dass die

von Fontaine.

Function, welche, wenn zwei Systeme zusammenfallen, Null ist, allemal in dem einen Systeme grösser, in dem andern kleiner sey als Null, und bestimmt aus einem einzelnen Falle die Systeme, wo sie positiv und wo sie negativ ist. Dieses kann aber nicht ohne Beweis zugegeben werden, und es finden Zweifel gegen die Allgemeinheit des Satzes Statt.

In dem obigen Fall z. B. lässt sich solches nachweisen. Denn entwickelt man das System $(x+a)(x+b)$, so erhält man $x^2+x(a+b)+ab$, also $m = a+b$ und $n = ab$, folglich $m^2-4n=(a-b)^2$, welche Grösse immer positiv ist. Eben so giebt das System $(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$, wenn man es entwickelt, $x^2+2ax+a^2+b^2$, also $m = 2a$, $n = a^2+b^2$, und $m^2-4n=-4b^2$, welche Grösse immer negativ ist. Eben so lassen sich die andern Bedingungen für die verschiedenen Systeme der Gleichung des zweiten Grades nachweisen.

129.

Der Verfasser wendet das nämliche Verfahren und die nämlichen Sätze auf Gleichungen des dritten und vierten Grades an, und giebt für dieselben Tafeln wie die obige (314.). Man sehe die im Jahre 1764 gedruckte Sammlung seiner Memoiren.

Der Umfang der Tafeln nimmt im Verhältniss der Zahl der Verbindungen der Factoren zu, und die Untersuchung der zu jeder Verbindung oder zu jedem Systeme gehörigen Bedingungen wird um so schwieriger, da zuweilen die Bedingungen, welche aus

Auflösungs-Verfahren

der Gleichheit der Grössen $a, b, c\ldots.$ entstehen, von welchen Grössen man annimmt, dass sie eine fallende Reihe bilden, für mehr als ein System zugleich gelten, und man also in solchem Falle andere Bedingungen suchen muss, um ein System von dem andern zu unterscheiden.

Der Verfasser giebt dafür keine allgemeine Regel. Er begnügt sich, der Reihe nach die einfachsten Functionen für die Coefficienten $m, n, p\ldots.$ der gegebenen Gleichung zu versuchen, bis er auf eine stösst, die in dem, beiden Systemen gemeinschaftlichen Falle gleich Null, und in dem einen Falle positiv, in dem andern negativ ist.

So z. B. sucht er, nachdem er gefunden, dass für die Gleichung $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$ die beiden Systeme $(x+a)(x+b)(x+b)$ und $(x+a)(x+a)(x+b)$ die nämliche Bedingungs-Gleichung

$$4(m^2-3n)(-3mp+n^2)-(mn-9p)^2=0$$

haben, eine Function von der Form Am^2+Bn, oder $Am^3+Bmn+Cp$ u. s. w., welche in dem gemeinschaftlichen Falle $a=b$ Null, und für das erste System >0, für das zweite <0 ist. Er findet die Grösse $2m^3-qmn+27p$, welche den beiden Systemen genugthut.

Obgleich es dem Verfassser gelang, diese Functionen für alle Fälle der Gleichung des dritten und vierten Grades zu finden, ist es doch zweifelhaft, ob es möglich sey, sie im Allgemeinen für Gleichungen höherer Ordnungen zu finden; wenigstens ist nicht bewiesen, dass immer nothwendig Functionen mit

den

von Fontaine.

den nöthigen Eigenschaften existiren. Also kann die Theorie möglicher Weise auch von dieser Seite Mängel haben.

130.

Uebrigens kann man auch die obigen Bedingungen direct finden; denn man setze, die Gleichung

315. $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$

habe einen zweifachen Factor $(x+\alpha)^2$, so darf man nur das Polynom $x^3 + mx^m + nx + p$ durch $x^2 + 2\alpha x + \alpha^2$ dividiren. Der Quotient ist $x + m - 2\alpha$, und der Rest

$$(n - \alpha^2 - 2m\alpha + 4\alpha^2)x + p + 2\alpha^3 - m\alpha^2.$$

Man muss also einzeln

$$3\alpha^2 - 2m\alpha + n = 0 \text{ und}$$
$$2\alpha^3 - m\alpha^2 + p = 0$$

setzen, woraus

316. $\alpha = \dfrac{mn - 9q}{2m^2 - 6n}$

folgt. Substituirt man diesen Werth von α in die erste Gleichung, so erhält man

317. $(mn - 9p)^2 + 4(m^2 - 3n)(3mp - n^2) = 0,$

welches die, für beide Systeme gemeinschaftliche Bedingung ist.

Da nun $x + m - 2a$ der ungleiche Factor der Gleichung ist, so muss man $a = b$ und $m - 2\alpha = a$ für das System $(x+a)(x+b)(x+b)$, und $\alpha = a$, $m - 2\alpha = b$ für das System $(x+a)(x+a)(x+b)$ setzen. Dieses giebt, weil $a > b$ ist, für das erste

Auflösungs-Verfahren

System $m - 2\alpha > \alpha$, oder $m - 3\alpha > 0$, und für das zweite System $m - 3\alpha < 0$.

Setzt man hierin den Werth von α, so erhält man

$$318.\quad m - 3\alpha = \frac{2m^3 - 9mn + 27p}{m^2 - 3n}.$$

Von der andern Seite ist leicht zu sehen, dass für beide Systeme $m^2 - 3n > 0$ ist. Denn das System $(x+a)(x+b)(x+b)$ giebt $m = a + 2b$, $n = 2ab + b^2$, wie die Entwickelung zeigt; also

$$m^2 - 3n = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2,$$

und da man für das andere System nur b statt a setzen darf, so erhält man eben so $m - 3n = (a-b)^2$. Die Bedingungen für die beiden Systeme sind also blos

$$319.\quad \begin{cases} 2m^3 - 9mn + 27p > 0 \text{ für das erste, und} \\ 2m^3 - 9mn + 27p < 0 \text{ für das zweite,} \end{cases}$$

wie bei Fontaine.

131.

Aber die Bedingungen selbst, welche aus der Gleichheit einiger der Grössen $a, b, c\ldots.$ folgen, sind nicht immer dem Systeme, zwischen welchem die Gleichheit Statt findet, ausschliesslich eigen, wie Fontaine annimmt, wodurch ein Hauptgrundsatz der Theorie wegfällt.

Er findet z. B., dass die Bedingung

$$2m^3 - mn - p = 0$$

bei der Gleichung des dritten Grades

$$x^3 + mx^2 - nx - p = 0$$

von Fontaine.

dem Systeme

$$(x - a)(x + a + b\sqrt{-1})(x + a - b\sqrt{-1})$$

ausschliesslich eigen sey, und dass sich dieses System von dem andern dadurch unterscheidet. Es ist aber zu bemerken, dass die Bedingung auch für jedes andere, auf die nämliche Gleichung sich beziehende System von der Form $(x + a)(x - b)(x + c)$ gilt, sobald $a + c = 2b$ ist, welches sich auch a priori beweisen lässt.

Wäre also die Gleichung $x \;\; + 2x^2 - 5x - 6 = 0$ gegeben, so könnte man, weil dieselbe der Bedingung entspricht, indem, wenn man $m = 2$, $n = 5$, $p = 6$ setzt, $2 . 8 - 2 . 5 - 6 = 0$ ist, aus der Tafel in Fontaine's Memoire S. 546 schliessen, dass die Gleichung drei Factoren von der Form

$$(x - a)(x + a + b\sqrt{-1})(x + a - b\sqrt{-1}),$$

und folglich zwei unmögliche Wurzeln habe, während sie doch im Gegentheil aus den drei reellen Factoren

$$(x + 3)(x - 2)(x + 1)$$

zusammengesetzt ist.

Eben dies lässt sich von der Bedingung

$$2^4 . 3^4 . n^4 . q + 2^3 . 3^5 . n^3 p^2 + 2^7 . 3^2 . 5^2 . n^2 q^2$$
$$+ 2^4 . 2^2 . 5 . 7 . np^2 q - 3^3 . 7^3 . p^4 + 2^8 . 5^4 . q^3 = 0$$

sagen, welche Fontaine Seite 568 für das gemeinschaftliche Kennzeichen der beiden Systeme

$(x + a)(x - b)(x - b + c\sqrt{-1})(x - b - c\sqrt{-1})$ und
$(x + a)(x - c)(x - c + b\sqrt{-1})(x - c - b\sqrt{-1})$

findet, die zu dem Ausdrucke

Auflösungs-Verfahren

$$x^4 - 4x^2 + px - q = 0$$

gehören. Diese Bedingung ist den beiden Systemen nicht ausschliesslich eigen. Sie gilt auch für jedes andere System von der Form

$$(x + a)(x - b)(x - c)(x - d),$$

welches zu den Gleichungen S. 552 gehört, in so fern $b + d = 2c$ ist. Alles dieses lässt sich a priori beweisen, jedoch würde uns ein grösseres Detail zu weit führen.

132.

Es folgt aus diesen Bemerkungen, dass sich die Bedingungen, durch welche sich ein System von Factoren von dem andern unterscheidet, blos dadurch, dass man in den Grössen a, b, c.... die in diesen Factoren vorkommen, nach Fontaine, die Verhältnisse der Gleichheit und Ungleichheit in Betrachtung zieht, nicht immer finden lassen. Wäre solches aber auch möglich, so würde die Rechnung für Gleichungen über den vierten Grad ungemein weitläuftig, und dann selbst zur numerischen Auflösung der Gleichungen nicht einmal nützlich seyn, wie wir solches bei der Untersuchung des zweiten Theils der Methode zeigen werden.

133.

Hat man nach der Voraussetzung des Verfassers die Form der Factoren der gegebenen Gleichung gefunden, so sind nur noch die Werthe der Grössen a, b, c...., die in derselben vorkommen, und welche

von Fontaine.

sämmtlich positiv und ungleich angenommen sind, zu bestimmen. Hierbei verfährt der Verfasser auf folgende Weise.

Er entwickelt die Producte der Factoren, vergleicht sie mit der gegebenen Gleichung, und findet auf diese Weise so viele Gleichungen als unbestimmte Grössen a, b, $c \ldots$. Er eliminirt alle diese Grössen bis auf zwei, die er bestimmen will, und behält also zwei Gleichungen zwischen diesen zwei Grössen übrig. Er setzt die grössere Grösse gleich $R\alpha$, die kleinere gleich $R\beta$, eliminirt nun R und findet eine homogene Gleichung mit α und β, in welche er $x\varphi + y$ statt α und $z\varphi + u$ statt β setzt.

Er setzt hierauf $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$ und $u = 1$, welches eine Gleichung mit φ giebt, in welche er der Reihe nach $\varphi = 1, 2, 3 \ldots$ setzt, bis zwei Resultate mit entgegengesetzten Zeichen erscheinen. Alsdann setzt er $\varphi = A$, wo A die kleinste der beiden Zahlen ist, welche die Resultate mit entgegengesetzten Zeichen geben; also $\alpha = A$, $\beta = 1$.

Er setzt sodann $x = A$, $y = 1$, $z = 1$, $u = 0$, und sucht zu der entstehenden Gleichung mit φ wiederum zwei Substitutionen, deren Resultate entgegengesetzte Zeichen haben. Ist B die kleinste der beiden Zahlen, so setzt er $\varphi = B$, also $\alpha = AB + 1$ und $\beta = B$.

Er fährt auf diese Weise fort, indem er x gleich dem letzten Werthe von α, y gleich dem vorletzten Werthe von α, z gleich dem letzten, und u gleich dem vorletzten Werthe von β setzt.

Auflösungs-Verfahren

Nun werden der Reihe nach diese Werthe von α und β in den rationalen Ausdruck von R, welchen die beiden Gleichungen gaben, substituirt, und es werden daraus die Werthe von a und b, und zwar um so genauer gefunden, je weiter die Operationen mit α und β fortgesetzt worden.

Um ein Beispiel zu geben, will ich dasjenige nehmen, welches in den Memoiren der Academie von 1747 S. 672 steht.

Es sey die Gleichung $x^2 - 3x + 1 = 0$ gegeben. Da sie zu der Classe der Ausdrücke $x^2 - mx + n$ gehört, wenn man $m = 0$, $n = 1$ setzt, so findet man, wenn man die zu diesem Ausdruck gehörigen Bedingungen in der obigen Tafel (314.) aufsucht, dass die Bedingung $m^2 - 4n = 0$ erfüllt wird, woraus zu schliessen, dass die beiden Factoren von der Form $(x - a)(x - b)$ sind. Man findet also, wenn man entwickelt, $a + b = 3$ und $ab = 1$.

Es sey nun $a = \alpha R$ und $b = \beta R$, so ist $R(\alpha + \beta) = 3$ und $R^2 \alpha\beta = 1$; also $R = \frac{3}{\alpha + \beta}$ und $9\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2$, oder

$$\alpha^2 - 7\alpha\beta + \beta^2 = 0,$$

wenn man $\alpha = x\varphi + y$ und $\beta = z\varphi + u$ setzt.

I. Es sey $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$ und $u = 1$, so ist $\alpha = \varphi$, $\beta = 1$. Substituirt man diesen Werth, so erhält man $\varphi^2 - 7\varphi + 1 = 0$. Setzt man $\varphi = 1$, 2 *etc.* bis $\varphi = 6$, so erhält man negative Resultate; aber $\varphi = 7$ giebt das Resultat $+ 1$. Also ist $\varphi = 6$, und folglich $\alpha = 6$, $\beta = 1$, $R = \frac{3}{7}$.

von Fontaine.

II. Es sey $x = 6$, $y = 1$, $z = 1$, $u = 0$, so ist $\alpha = 6\varphi + 1$, $\beta = \varphi$, und man erhält die Gleichung $5\varphi^2 - 5\varphi - 1 = 0$. Hier giebt $\varphi = 1$ das Resultat -1; $\varphi = 2$ giebt 9; also ist $\varphi = 1$, und folglich $\alpha = 7$, $\beta = 1$, $R = \frac{3}{8}$.

III. Es sey $x = 7$, $y = 6$, $z = 1$, $u = 1$, so ist $\alpha = 7\varphi + 6$, $\beta = \varphi + 1$. Substituirt man dieses, so erhält man die Gleichung $\varphi^2 - 5\varphi - 5 = 0$. Setzt man $\varphi = 1$, 2 *etc.*, bis $\varphi = 5$, so erhält man negative Resultate; aber $\varphi = 6$ giebt das Resultat $+1$. Also ist $\varphi = 5$, und hieraus $\alpha = 41$, $\beta = 6$ und $R = \frac{3}{27}$ u. s. w.

134.

Dieses ist das Näherungs-Verfahren, welches Fontaine in seinen Memoiren vom Jahre 1747 ohne Beweis giebt, und welches er hernach in der Sammlung seiner Memoiren wieder vorgetragen hat. Er setzt, wie man sieht, voraus, dass sich durch die Substitution der Zahlen 1, 2, 3.... statt φ in die verschiedenen Gleichungen mit φ, immer zwei Zahlen finden lassen, welche Resultate mit verschiedenen Zeichen geben; was aber, wie wir im ersten Abschnitt (§. 5. etc.) zeigten, nur dann der Fall ist, wenn die Wurzeln dieser Gleichung positiv und keine von der andern um weniger als Eins verschieden sind. Aus dieser Bemerkung sind leicht Beispiele zu finden, in welchen die Fontainesche Methode unrichtige Resultate giebt.

Es sey z. B. die Gleichung

Auflösungs-Verfahren

$$= x^3 - 2x^2 - 23x + 60 = 0,$$

welche sich, wenn man $m = 2$, $n = 23$, $p = 6$ setzt, auf den Ausdruck $x^3 - mx - nx + p$ bezieht. Die Tafel S. 547 der Sammlung der Fontaineschen Memoiren giebt für das System $(x+a)(x-b)(x-c)$ die drei Bedingungen

$$4(m^2 + 3n^2)(n^2 + 3mp) - (-mn + qp)^2 > 0,$$
$$(mn - p) < 0,$$
$$m^2 - n < 0.$$

Da dieselben hier erfüllt werden, so folgt, dass das System für die gegebene Gleichung passt.

Um nun die drei positiven und ungleichen Grössen a, b, c zu finden, vergleiche man das Product der Factoren,

$$x^3 + (a - b - c)x^2 + (-ab - ac + bc)x + abc$$

mit der gegebenen Gleichung, so erhält man die drei Gleichungen

$$a - b - c = 2,$$
$$-ab - ac + bc = -23 \text{ und}$$
$$abc = 60.$$

Eliminirt man c, so findet man $c = a - b + c$, und die beiden andern Gleichungen geben

$$a^2 - ab + b^2 + 2(a - b) = 23 \text{ und}$$
$$(a - b)ab + 2ab = 60.$$

Setzt man $a = \alpha R$ und $b = \beta R$, so erhält man

$$R^2(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) + 2R(\alpha - \beta) = 23 \text{ und}$$
$$R^3(\alpha - \beta)\alpha\beta + 2R^2\alpha\beta = 60.$$

Eliminirt man endlich R, so erhält man eine Glei-

chung des sechsten Grades zwischen α und β, welche auf

$$(20(\alpha^2+\beta^2)-41\alpha\beta(15\alpha^2+\beta^2)-34\alpha\beta)$$
$$\times(12(\alpha^2+\beta^2)+25\alpha\beta)=0$$

gebracht werden kann.

Nun muss man nach Fontaine $\alpha=x\varphi+y$, $\beta=z\varphi+u$, und in die erste Gleichung $x=1$, $y=0$, $z=0$, $u=1$ setzten, welches $\alpha=\varphi$, $\beta=1$ giebt. Die Gleichung giebt also

$$(20(\varphi^2+1)-41\varphi)(15(\varphi^2+1)-34\varphi)$$
$$(12(\varphi^2+1)+25\varphi)=0,$$

wo man der Reihe nach $\varphi=1, 2, 3$ *etc.* setzen muss, bis man auf zwei Werthe von φ kommt, welche Resultate von entgegengesetzten Zeichen geben. Allein dieses geschieht niemals, weil die Resultate immer positiv sind, wie die blosse Ansicht der Gleichung zeigt. Die Methode ist also schon bei der ersten Operation fehlerhaft.

Es ist leicht zu sehen, dass man nur ein negatives Resultat finden kann, wenn man der Grösse φ einen Werth zwischen 1 und 2 giebt. Setzt man z. B. $\varphi=\frac{3}{2}$, so ist das Resultat $-\frac{7\cdot9\cdot123}{16}$ was aber nach der Fontaineschen Vorschrift nicht geschehen soll, welche vielmehr für α und β immer ganze Zahlen verlangt. Wollte man aber übrigens für φ wirklich auch Brüche setzen, so wäre es unstreitig einfacher, sogleich mit der gegebenen Gleichung selbst zu operiren. Man dürfte nur für diese Gleichung selbst zwei Werthe der unbekannten

Auflösungs-Verfahren

Grösse suchen, welche Resultate mit entgegengesetzten Zeichen geben. Die Aufsuchung der Factoren, welche den Gegenstand der Tafeln bei Fontaine ausmacht, ist dabei unnütz, und die Schwierigkeit der Aufgabe wird nicht gehoben.

Auch ist noch zu bemerken, dass, wenn man bei der ersten Operation $\varphi = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{v}$ setzt, die Gleichung mit φ im Allgemeinen immer von einer höhern Ordnung ist als die gegebene Gleichung; denn wenn a und b zwei reelle Wurzeln sind, so sind die Wurzeln der Gleichung φ alle die Quotienten, welche entstehen, wenn man die Wurzeln, eine mit der andern dividirt, so dass, wenn man die Ordnungs-Zahl der gegebenen Gleichung, $= m$ setzt, diejenige der Gleichung mit φ, $m(m-1)$ ist, welche Gleichung ausserdem nothwendig eine reciproke ist.

Ist a eine reelle Wurzel und b der reelle Theil der beiden imaginairen Wurzeln, so ist $\frac{a}{b}$ der Quotient einer Wurzel, dividirt durch die halbe Summe zweier andern Wurzeln, und die Gleichung mit φ steigt dann auf die $\frac{m(m-1)(m-2)}{2}$te Ordnung.

135.

Da übrigens die Gleichung zwischen α und β, welche man durch das Fontainische Verfahren findet, nothwendig homogen ist, so ist eigentlich nur eine einzige unbekannte Grösse $\frac{\alpha}{\beta}$ vorhanden, und die

von Fontaine.

Substitution von $x\varphi + y$ statt a und $z\varphi + u$ statt p ist das Nämliche, als wenn man unmittelbar in die gegebene Gleichung $\frac{x\varphi + y}{z\varphi + u}$ statt der unbekannten Grösse setzt. Dieser Ausdruck ist nun derjenige der convergenten Brüche, welcher einen Kettenbruch giebt, in welchem φ der Reihe nach die Nenner des Bruchs bezeichnet, und $\frac{y}{u}$ und $\frac{x}{z}$ sind die beiden auf einander folgenden Brüche, welche dem Bruche $\frac{x\varphi + y}{z\varphi + u}$ vorhergehen, wie dieses aus der Theorie der Kettenbrüche folgt. Es scheint also, dass Fontaine das Verhältniss der Grössen a und b durch die von Kettenbrüchen abhängigen convergenten Brüche auszudrücken gesucht hat. Allein die Schwierigkeit liegt darin, die Werthe von φ zu finden, wenn der Bruch $\frac{a}{b}$ nur durch eine Gleichung gegeben ist. Man sehe hierüber die vierte Abtheilung (§. 78.).

Ich habe mich ein wenig ausführlich über die Fontainesche Auflösungs-Methode geäussert, weil mir bis jetzt nur zwei Schriftsteller bekannt sind, welche ihrer erwähnt haben, nämlich d'Alembert in der Encyclopädie, bei dem Worte Gleichung, und Condorcet in der Geschichte der Academie der Wissenschaften von den Jahren 1771 und 1772, welche beide sich begnügen, Zweifel gegen die Methode aufzustellen, ohne sie näher zu untersuchen.

[*Es ist gewiss kein angenehmes Geschäft, die Irrthümer Anderer aufzudecken und zu widerle-*

Auflösungs-Verfahren

gen; und die vorstehende Abhandlung Lagrange's über die Fontainesche Gleichungs-Auflösungs-Methode hat wahrscheinlich nicht zu seinen erfreulichsten Arbeiten gehört, wie auch schon der im Eingange des Abschnitts durchblickende Unwille anzuzeigen scheint. Allein das Geschäft ist nothwendig, um die Unkundigen zu enttäuschen und dem Irrthume zu wehren, der sich leider eben so schnell zu verbreiten pflegt als die Wahrheit. Es giebt in der That nur zu häufig Werke, die durch Anmassung und Schwulst zu ersetzen suchen, was ihnen an gesundem Sinne und Inhalt abgeht. Solche Werke sind der Verbreitung der Wahrheit wesentlich nachtheilig, da sie den Unkundigen täuschen und die Gaukelei nur zu leicht Eingang findet; die Widerlegung derselben ist, obwohl lästig, nützlich. Wenn man einen Blick auf das Fontainesche Memoire wirft, welches von den Gleichungen handelt, und sich unter dem Titel: „L'art de recondre les équations" ankündigt (es steht in der Sammlung der Fontaineschen Memoiren vom Jahre 1784), so erschrickt man vor der Masse von Formeln, welche die von Lagrange erwähnten Tafeln enthalten, und der Lernende kann dergleichen leicht für eine gelehrte und wichtige Arbeit halten. Aus dem obigen sieht man die Unbrauchbarkeit der Methode. In diesem Betracht muss man Lagrange für die obige Nachweisung Dank wissen; zugleich aber wird man auch hier von neuem mit Vergnügen

von Fontaine.

an der Ruhe, mit welcher die Nachweisung gegeben wird, die Sanftmuth dieses grossen Mannes und seine Erhabenheit über Alles, was der Wissenschaft unwerth ist, bemerken; denn wie man aus Delambres Nachricht von Lagrange's Leben sieht (Band 1. Seite XXV und XXVI.), ist es eben der Verfasser dieses mislungenen Versuches, die Gleichungen aufzulösen, welcher unsern Mathematiker unfreundlich und fast unwürdig behandelte.]

Achter Zusatz.

Ueber die Grenzen der Wurzeln der Gleichungen und die Kennzeichen der Realität der Wurzeln.

136.

Die Untersuchung der Grenzen der Wurzeln ist in der Theorie der Gleichungen das Nächste nach der allgemeinen Auflösung. Da bis jetzt die allgemeine Auflösung der Gleichungen nur bis zum vierten Grade reicht, und, wenn sie weiter möglich ist, wie bewiesen, nur durch Auflösung von Gleichungen viel höherer Ordnungen geschehen kann, welches aber so zusammengesetzte Ausdrücke giebt, dass sie sich gar nicht mehr behandeln lassen; so beruht unter diesen Umständen die ganze Kunst der Auflösung der Gleichungen auf die Aufgabe von den Grenzen. Auch kann man in der That, sobald man für jede Wurzel einzelne Grenzen gefunden hat, diese Grenzen durch wiederholte Substitution zusammenziehen, und auf diese Weise dem Werthe der Wurzel so nahe kommen als man will.

Realität der Wurzeln.

137.

Man hat schon gegen das Ende des siebzehnten Jahrhunderts die Nothwendigkeit eingesehen, sich mit dieser Aufgabe zu beschäftigen; und sobald man gefunden hatte, dass die Gleichung, welche entsteht, wenn man jedes Glied der gegebenen Gleichung mit dem Exponenten der unbekannten Grösse in derselben multiplicirt, die Bedingungen der Gleichheit der Wurzeln der gegebenen Gleichung enthält, so fand man auch bald, dass die Wurzeln dieser Gleichung Grenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind. Bekanntlich ist Hudde der Erfinder des ersten dieser beiden wichtigen Sätze. Der zweite Satz gehört meines Wissens Rolle, welcher ihn in seiner Algebra vom Jahre 1690 mittheilte und ihn zur Grundlage seiner Methode der Cascaden machte. Nach dieser Methode hängen die Grenzen der Wurzeln einer gegebenen Gleichung von einer Gleichung ab, die um einen Grad niedriger ist; die Grenzen der Wurzeln dieser von einer andern wiederum um einen Grad niedrigern Gleichung u. s. w., so dass man, um die Wurzeln einer gegebenen Gleichung zu finden, verschiedene aufeinander folgende, je um einen Grad niedrigere Gleichungen auflösen muss. Man sehe die „Analyse démontrée" von Reyneau, wo man diese Methode mit vielem Detail findet. Aber wegen der Weitläuftigkeit der Rechnung und der Ungewissheit, welche sie in Absicht der unmöglichen Wurzeln lässt, hat man sie längst aufgegeben. Man

Ueber die Grenzen und die

hätte auch vielleicht überhaupt auf ein allgemeines Mittel, Gleichungen aufzulösen, verzichten müssen, wenn nicht ein von jeder Gleichungs-Auflösung unabhängiges Mittel, die Grenzen der Wurzeln zu finden, existirte, wie wir solches im ersten Abschnitte und im vierten Zusatze sahen.

Die Untersuchung des Maximums und Minimums parabolischer Linien führte Stirling auf ein Verfahren, die Zahl und die Grenzen der reellen Wurzeln des dritten und vierten Grades zu finden, welches Euler in seiner Differential-Rechnung [*3ten Theil 12te und 13te Kapitel*] allgemein gemacht hat. Diese Methode kommt im Wesentlichen mit der von Rolle überein; aber sie giebt, ausser den reellen Wurzeln, auch die unmöglichen, und könnte auch allgemeine Ausdrücke geben, um diese Wurzeln in Gleichungen des fünften Grades vermittelst der Wurzeln vom vierten Grade zu unterscheiden.

Durch die nämliche Betrachtung fand de Gua ein Verfahren, die Kennzeichen der Realität aller Wurzeln einer beliebigen Gleichung zu bestimmen. (Man sehe die Memoiren der Academie der Wissenschaften vom Jahre 1741.)

Wir sahen oben, dass die Aufgabe auch vermittelst einer Gleichung aufgelöset werden kann, deren Wurzeln die Quadrate der Differenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind. Aber diese Auflösung ist auf die Form der unmöglichen Wurzeln gegründet, statt dass die Theorie von de Gua davon nicht abhängt. Auch hat seine Methode den Vorzug, dass

dass sie nur der Berechnung von Gleichungen bedarf, welche von niedrigerer Ordnung sind, als die gegebene.

Da diese verschiedenen Methoden an sich und noch mehr wegen des wirklichen Nutzens, den sie gelegentlich haben können, interessant sind, so glaube ich, wird man es gern sehen, sie hier, auf eine und dieselbe Theorie und auf die einfachsten Sätze der Analyse der Gleichungen gegründet, beisammen zu finden.

138.

Es sey allgemein Fx eine rationale Function von x, ohne Divisor, nämlich

320. $Fx = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} \ldots + V.$

Bezeichnet man die reellen Wurzeln der Gleichung

321. $Fx = 0,$

das heisst, die Werthe von x, welche dieser Gleichung entsprechen können, durch $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, so hat man die identische Gleichung

322. $Fx = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \ldots \times fx,$

wo fx eine ähnliche Function von x ist, aber von einer niedrigern Ordnung als m, und die nie Null und negativ werden kann, welchen Werth man auch der Grösse x giebt. (Zweiter Zusatz.)

Da diese Gleichung [*weil sie identisch ist*] Statt findet, was auch x seyn mag, so gilt sie auch, wenn man $x+k$ statt x setzt, wo k seyn kann, was man will. Entwickelt man also die Function nach Poten-

zen von k, so müssen sich alle Glieder, welche einerlei Potenzen von k enthalten, in sich aufheben. Dieses giebt noch eben so viele identische Gleichungen, die man also durch die wirkliche Entwickelung finden kann. Da aber diese neuen Gleichungen nichts anders als diejenigen sind, welche wir in der Theorie der Functionen abgeleitete Gleichungen nannten, so wollen wir uns, der grössern Einfachheit wegen, hier der Bezeichnung und des Algarithmus dieser Theorie bedienen. Die Anwendung derselben auf die Gleichungen wird ein neues Beispiel von ihrem Nutzen in der Algebra geben, von welcher sie eigentlich ein Theil ist. [*Und zwar müssten selbst die Grundsätze der sogenannten Differential-Rechnung an der Spitze der Algebra stehen, weil sie selbst der Theorie der Gleichungen zur Grundlage dient. Statt der neuen Lagrangeschen Functions-Zeichen, deren sich das Original, bei dem, was hier folgt, bedient, setze ich, aus den in der Vorrede zur Sammlung dieser Werke angegebenen Gründen, die Differential-Zeichen.*]

139.

Wir wollen, der Kürze wegen, die Function

$$323. \quad (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots. = \varphi x$$

setzen, so ist die obige identische Gleichung (322.) folgende:

$$324. \quad Fx = \varphi x . fx.$$

Hiervon ist die erste abgeleitete

Realität der Wurzeln.

$$325.\quad \frac{dFx}{dx}=fx\frac{d\varphi x}{dx}+\varphi x\frac{dfx}{dx}$$

und es ist [*wie aus* (323.) *folgt*]

$$326.\quad \frac{d\varphi x}{dx}=(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots+(x-\alpha)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots$$
$$+(x-\alpha)(x-\beta)(x-\delta)\ldots+(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots$$

.

Man setze, die Reihe der Wurzeln α, β, $\gamma\ldots.$ wäre nach der Grösse derselben geordnet, so dass sie von der grössten positiven Wurzel anfängt, und bei der kleinsten negativen endigt, so ist aus dem Ausdrucke (326.) leicht zu sehen, dass

$$327.\quad \begin{cases} \frac{d\varphi x}{dx} > 0 \text{ ist, für } x=\alpha \\ \frac{d\varphi x}{dx} < 0, \text{ für } x=\beta \\ \frac{d\varphi x}{dx} > 0, \text{ für } x=\gamma \end{cases}$$

.

[*Für* $x=\alpha$ *ist in* (326.) $\frac{d\varphi x}{dx}=(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots.$, *denn nur dieses eine Glied bleibt übrig, alle übrige verschwinden für* $x=\alpha$. *Die Grösse* $(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots.$ *aber ist positiv, weil* α, *und folglich jetzt* x, *nach der Voraussezzung, grösser ist, als die übrigen Grössen* $\beta, \gamma, \delta\ldots.$; *also ist für* $x=\alpha$, $\frac{d\varphi x}{dx}$ *positiv oder* >0.

Für $x=\beta$ *ist* $\frac{d\varphi x}{dx}=(x-\alpha)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots.$, *in welchem Producte der Factor* $x-\alpha$ *allein ne-*

Ueber die Grenzen und die

gativ ist, alle übrigen sind positiv, weil β *grösser als* γ, δ.... *und kleiner als* α *seyn soll; also ist für* $x=\beta$, $\frac{d\varphi x}{dx}$ *negativ oder* <0.

Für $x=\gamma$ *ist* $\frac{d\varphi x}{dx}=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\delta)....$, *in welchem Producte alle Factoren, bis auf die beiden* $x-\alpha$ *und* $x-\beta$, *positiv sind. Da nun das Product der beiden negativen Grössen* $x-\alpha$ *und* $x-\beta$ *ebenfalls positiv ist, so ist für* $x=\gamma$, $\frac{d\varphi x}{dx}$ *positiv oder grösser als* o, *u. s. w.*]

Auf der andern Seite ist für $x=\alpha, \beta, \gamma$ *etc.* φx immer gleich Null, und fx immer grösser als Null [*das Erste, zu Folge der Gleichung* (323.), *das Letzte, weil* fx *nach der Voraussetzung nie negativ werden kann* (§. 138.)].

Daraus folgt, dass

$$328.\quad \begin{cases} \frac{dFx}{dx} > 0 \text{ ist, für } x=\alpha \\ \frac{dFx}{dx} < 0, \quad \text{für } x=\beta \\ \frac{dFx}{dx} > 0, \quad \text{für } x=\gamma \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

[*Denn das zweite Glied rechterhand in dem allgemeinen Ausdruck von* $\frac{dFx}{dx}$ (325.) *fällt für* $x=\alpha, \beta, \gamma$.... *immer weg, weil für* $x=\alpha, \beta, \gamma$.... φx *immer Null ist* (323.), *also bleibt für* $x=\alpha, \beta, \gamma$.... *blos* $\frac{dFx}{dx}=fx\frac{d\varphi x}{dx}$, *womit es*

sich eben so verhält, wie mit $\frac{d\varphi x}{dx}$ (327.), *weil* fx *immer positiv ist* (§. 138.)].

Nun erhält man, wenn man die erste Ableitung des Polynoms Fx (320.) nimmt,

329. $\frac{dFx}{dx} = mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} \ldots + T;$

also muss auch die Gleichung $\frac{dFx}{dx} = 0$, welche vom Grade $m - 1$ ist, nothwendig reelle Wurzeln haben, welche zwischen die Werthe der Wurzeln α und β, β und γ, γ und δ *etc.* fallen (Erster Zusatz) [*und zwar deshalb, weil nach* (328.) *die Grösse* $\frac{dFx}{dx}$ *von* $x = \alpha$ *bis* $x = \beta$, *von* $x = \beta$ *bis* $x = \gamma$ *u. s. w. jedesmal das Zeichen wechselt. Jedoch findet der Satz natürlich nur dann nothwendig Statt, wenn die Zahl der reellen Wurzeln* α, β, $\gamma \ldots$ *in* $Fx = 0$ *grösser als Eins ist. Hat* $Fx = 0$ *nur eine reelle Wurzel, so findet er nicht nothwendig Statt.*]

140.

Wir wollen die reellen Wurzeln der Gleichung

$$\frac{dFx}{dx} = 0$$

durch $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,} \ldots$ bezeichnen, so lässt sich ganz auf dieselbe Art beweisen, dass

Ueber die Grenzen und die

$$330.\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 Fx}{dx^2} > 0 \text{ ist, für } x = \alpha, \\ \dfrac{d^2 Fx}{dx^2} < 0, \quad \text{für } x = \beta, \\ \dfrac{d^2 Fx}{dx^2} > 0, \quad \text{für } x = \gamma, \end{cases}$$

.

woraus ebenfalls, ganz wie oben, folgt, dass die Gleichung $\frac{d^2 Fx}{dx^2} = 0$, welche

$$331.\quad \frac{d^2Fx}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2} + (m-1)(m-2)Ax^{m-3} + (m-2)(m-3)Bx^{m-4} \ldots + 2S$$

ist, wiederum nothwendig reelle Wurzeln hat, welche zwischen die Wurzeln α und β, β und γ *etc.* fallen.

Aus diesen Ausdrücken lassen sich mehrere Folgerungen ziehen, welche wir angeben wollen.

Wenn die gegebene Gleichung $Fx = 0$ zwei gleiche Wurzeln hat, so muss die abgeleitete Gleichung $\frac{dFx}{dx} = 0$ nothwendig eine Wurzel haben, die, weil sie zwischen jene beide fallen soll, ihr gleich ist. Der Factor also, welcher diese Wurzeln enthält, wird ein gemeinschaftlicher Divisor der beiden Polynome Fx und $\frac{dFx}{dx}$ seyn, welches auch an sich selbst folgt, weil das Polynom Fx den quadratischen Factor $(x - \alpha)^2$ enthält, und also in dem Polynom $\frac{dFx}{dx}$ noch der einfache Factor $x - \alpha$ übrig bleibt. Deshalb enthält die Gleichung $\frac{dFx}{dx} = 0$ die Bedin-

gung, unter welcher eine der beiden Wurzeln der Gleichung $Fx = 0$ zweifach ist. [*Das heisst, wenn* $Fx = 0$ *eine zweifache Wurzel hat, so ist für denselben Werth von* x *auch* $\frac{dFx}{dx}$ *gleich Null.*]

Eben so lässt sich zeigen, dass, wenn die Gleichung $Fx = 0$ drei gleiche Wurzeln hat, der Factor, welcher diese dreifache Wurzel enthält, ein gemeinschaftlicher Divisor der drei Grössen Fx, $\frac{dFx}{dx}$ und $\frac{d^2Fx}{dx^2}$ ist, und dass die beiden Gleichungen $\frac{dFx}{dx} = 0$ und $\frac{d^2Fx}{dx^2} = 0$ die Bedingungen enthalten, unter welchen die Gleichung $Fx = 0$ drei gleiche Wurzeln hat u. s. w., woraus die bekannten Sätze für gleiche Wurzeln folgen.

141.

Wir wollen nun bei den reellen Wurzeln der Gleichung $Fx = 0$ das Zeichen betrachten und annehmen, dass die gegebene Gleichung $Fx = 0$, p positive und q negative reelle Wurzeln enthalte; so enthält nothwendig die Gleichung $\frac{dFx}{dx} = 0$, $p - 1$ positive und $q - 1$ negative reelle Wurzeln, und ausserdem noch eine reelle Wurzel, die sowohl positiv als negativ seyn kann. Denn da zwischen zwei Wurzeln der Gleichung $Fx = 0$ nothwendig eine Wurzel der Gleichung $\frac{dFx}{dx} = 0$ fällt, so fallen $p-1$ posi-

tive Wurzeln zwischen die p positiven, und $q-1$ negative Wurzeln zwichen die q negativen Wurzeln, und ausserdem noch eine, die also positiv und negativ seyn kann, zwischen die kleinste positive und die grösste negative Wurzel der gegebenen Gleichung.

Hat also die Gleichung $Fx = 0$ mehr positive Wurzeln als die Gleichung $\frac{dFx}{dx} = 0$, so kann sie immer nur eine mehr haben [*sie kann indessen auch keine mehr haben*], und hat sie mehr negative Wurzeln, so kann es ebenfalls immer nur eine seyn.

Da nun aber die Zahl der positiven Wurzeln in einer Gleichung immer gerade oder ungerade ist, je nachdem ihr letztes Glied positiv oder negativ ist (zweiter Zusatz), so folgt, dass die Gleichung $Fx = 0$, wenn die letzten Glieder ohne x in den Gleichungen $Fx = 0$ und $\frac{dFx}{dx} = 0$ das nämliche Zeichen haben, keine positive Wurzel mehr haben kann, als die Gleichung $\frac{dFx}{dx} = 0$. Sie kann also in diesem Falle nur eine negative Wurzel mehr haben. Folglich kann $Fx = 0$ nur dann eine positive Wurzel mehr haben, als $\frac{dFx}{dx} = 0$, wenn die letzten Glieder dieser beiden Gleichungen, ohne x, von verschiedenen Zeichen sind.

Allgemein also kann die Gleichung $Fx = 0$ immer nur eine positive oder negative Wurzel mehr haben als die Gleichung $\frac{dFx}{dx} = 0$, je nachdem

Realität der Wurzeln.

ihre letzten Glieder entgegengesetzte oder einerlei Zeichen haben. Aus demselben Grunde kann die Gleichung $\frac{dFx}{dx} = 0$ nur eine positive oder negative Wurzel mehr haben als $\frac{d^2Fx}{dx^2} = 0$, je nachdem die Zeichen der letzten Glieder dieser beiden Gleichungen verschieden oder gleich sind u. s. w.

Nun sind in den obigen Ausdrücken (320. 329. 331.) die letzten Glieder der Gleichung $Fx = 0$, V, der Gleichung $\frac{dFx}{dx} = 0$, T, der Gleichung $\frac{d^2Fx}{dx^2} = 0$, $2T$ u. s. w., so dass, wenn man die Gleichungen rückwärts zählt,

die $m-1$te zum letzten Gliede $2.3.4\ldots.(m-1)A$,
die $m-2$te zum letzten Gliede $2.3.4\ldots.(m-2)B$,
die $m-3$te zum letzten Gliede $2.3.4\ldots.(m-3)C$,

u. s. w. hat. Nun ist die $m-1$te abgeleitete Gleichung

332. $$\frac{d^{m-1}Fx}{dx^{m-1}} = 2.3.4\ldots.mx + 1.2.3\ldots.(m-1)A = 0,$$

welche, wie man sieht, die Wurzel $-\frac{A}{m}$ hat, die positiv oder negativ ist, je nachdem A positiv oder negativ ist. Die $m-2$te abgeleitete Gleichung kann also nur eine positive oder negative reelle Wurzel gegen die $m-1$te mehr haben, je nachdem B und A verschiedene oder gleiche Zeichen haben. Eben so kann die $m-3$te abgeleitete Gleichung nur eine positive oder negative reelle Wurzel mehr haben, als die $m-2$te, je nachdem C und B verschiedene oder einerlei Zeichen haben, u. s. w.

Ueber die Grenzen und die

Daraus folgt, dass die Gleichung

333. $Fx = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} \ldots + V = 0$

nicht mehr positive Wurzeln als Zeichenwechsel, und nicht mehr negative Wurzeln als Zeichenfolgen haben kann. Sind also alle Wurzeln der Gleichung reell, so sind unter diesen so viel positive, als die Gleichung Zeichenwechsel hat, und so viele Wurzeln negativ, als die Gleichung Zeichenfolgen hat. [*Umgekehrt folgt aber keinesweges, dass etwa alle Wurzeln der Gleichung reell sind, wenn die Gleichung lauter Zeichenwechsel oder Zeichenfolgen hat, sondern die Zeichenwechsel und Zeichenfolgen zeigen nur an, ob und wie viele reelle Wurzeln der Gleichung, wenn sie dergleichen hat, grösser oder kleiner als Null sind.*]

Dieses ist der berühmte Cartesische Lehrsatz von den Gleichungen, welchen die Engländer Harriot zuschreiben, und von welchem es verschiedene Beweise von de Gua in den Pariser Memoiren, von Segner und Epinus in den Berliner Memoiren, von Kästner in seinem Commentare zur Newtonschen Arithmetik u. s. w. giebt. Ich habe den obigen Beweis gewählt, weil derselbe unmittelbar aus unserer Analysis folgt. Der einfachste Beweis ist jedoch der, welchen Segner in den Berliner Memoiren vom Jahre 1756 gab. Er besteht blos darin, dass, wenn man eine Gleichung mit $x - a$ multiplicirt, die Zahl der Zeichenwechsel, und, wenn man sie mit $x + a$ multiplicirt, die Zahl der Zei-

chenfolgen um Eins zunimmt, was auch der Werth der Coefficienten der Gleichung seyn mag.

142.

Wir wollen ferner die reellen und die imaginairen Wurzeln der Gleichung $Fx = 0$ unterscheiden. Es mögen, wie oben, die reellen Wurzeln der Gleichung $Fx = 0$, nach ihrer Grösse geordnet, α, β, γ...., diejenigen der Gleichung $\frac{dFx}{dx} = 0$, $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$ *etc.* seyn; so behaupte ich, dass unter den Wurzeln α, β, γ.... nur eine grösser seyn kann als $\alpha_{,}$, [*die grösste von den Wurzeln* $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$....] nur eine, welche zwischen $\alpha_{,}$ und $\beta_{,}$ fällt, nur eine, welche zwischen $\beta_{,}$ und $\gamma_{,}$ fällt u. s. w., zuletzt nur eine, welche kleiner ist als die kleinste der Grössen $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$.... Denn wenn α und β z. B. beide grösser wären als $\alpha_{,}$, so würde, weil zwischen α und β nothwendig eine Wurzel der Gleichung $\frac{dFx}{dx} = 0$ fallen muss [(§. 139.)], diese Wurzel grösser als $\alpha_{,}$ folglich, gegen die Voraussetzung, $\alpha_{,}$ nicht mehr die grösste Wurzel seyn. Eben so, wenn β und γ zugleich zwischen $\alpha_{,}$ und $\beta_{,}$ fielen, so würde, weil zwischen β und γ nothwendig eine Wurzel der Gleichung $\frac{dFx}{dx} = 0$ fällt, diese letzte Wurzel zwischen $\alpha_{,}$ und $\beta_{,}$ fallen, gegen die Voraussetzung, weil angenommen wird, dass $\alpha_{,}$ und $\beta_{,}$ ihrer Grösse nach auf einander folgen u. s. w. Wären endlich mehrere

Ueber die Grenzen und die

von den Wurzeln α, β, γ.... kleiner als die kleinste der Wurzeln $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$...., so würden diejenigen Wurzeln der Gleichung $\frac{dFx}{dx} = 0$, die nothwendig zwischen sie fallen, noch kleiner seyn, als die kleinste unter den Wurzeln $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$...., welches nicht seyn kann.

Da nun allgemein

334. $Fx = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \ldots. \times fx$ (322.)

ist, so ist klar, dass, wenn keine der Wurzeln α, β, γ *etc.* grösser ist als $\alpha_{,}$ und man setzt $\alpha_{,}$ statt x, der Werth von Fx nothwendig positiv seyn muss. Ist blos die eine Wurzel α grösser als $\alpha_{,}$, so ist der Werth von Fx negativ, weil im ersten Falle alle Factoren positiv sind, im zweiten nur einer negativ ist, das Polynom fx aber das Zeichen nie verändert.

Setzt man $\beta_{,}$ statt x, und keine der Wurzeln α, β, γ.... fällt zwischen $\alpha_{,}$ und $\beta_{,}$, so erhält man einen Werth von Fx von eben dem Zeichen, als wenn man $\alpha_{,}$ statt x setzt; hingegen ein Resultat von entgegengesetzten Zeichen, wenn eine der Wurzeln zwischen $\alpha_{,}$ und $\beta_{,}$ fällt. Denn ein Product wie $(\alpha_{,}-\alpha)$ $(\beta_{,}-\alpha)$ ist nothwendig immer positiv, wenn α grösser ist, als die beiden Grössen $\alpha_{,}$ und $\beta_{,}$, und nothwendig negativ, wenn α zwischen $\alpha_{,}$ und $\beta_{,}$ liegt, das heisst grösser, ist als die eine und kleiner als die andere Grösse.

Nun erhält man, wenn man in Fx, $\alpha_{,}$ statt x setzt,

335. $(\alpha_{,}-\alpha)(\alpha_{,}-\beta)(\alpha_{,}-\gamma) \ldots. \times f\alpha_{,}$,

Realität der Wurzeln.

und, wenn man $\beta_{,}$ statt x setzt,

$$336.\quad (\beta_{,}-\alpha)(\beta_{,}-\beta)(\beta_{,}-\gamma)\ldots\ldots\times f\beta_{,}.$$

Das Product dieser beiden Grössen ist

$$F\alpha_{,}.F\beta_{,}=(\alpha_{,}-\alpha)(\beta_{,}-\alpha)(\alpha_{,}-\beta)(\beta_{,}-\beta)(\alpha_{,}-\gamma)(\beta_{,}-\gamma)\ldots\ldots \times f\alpha_{,}f\beta_{,}.$$

Dieses Product ist positiv, wenn keine von den Grössen α, β, γ *etc.* zwischen $\alpha_{,}$ und $\beta_{,}$ fällt, und negativ, wenn nur eine von den Grössen $\alpha, \beta, \gamma\ldots\ldots$ zwischen $\alpha_{,}$ und $\beta_{,}$ fällt, weil die Grössen $f\alpha_{,}$, $f\beta_{,}$ immer positiv sind. Die Grössen $F\alpha_{,}$ und $F\beta_{,}$ haben also im ersten Falle gleiche, im zweiten Falle entgegengesetzte Zeichen.

Eben so lässt sich zeigen, dass die Substitutionen von $\gamma_{,}$ und $\beta_{,}$ statt x in Fx, Resultate von gleichen oder entgegengesetzten Zeichen geben, je nachdem keine oder eine von den Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma\ldots\ldots$ zwischen α und γ fällt u. s. w.

Bezeichnet man endlich die kleinste unter den Wurzeln $\alpha_{,}, \beta_{,}, \gamma_{,}\ldots\ldots$ durch $v_{,}$, so findet man aus dem Ausdruck von Fx durch Factoren, dass das Resultat der Substitution von $v_{,}$ statt x in Fx, wenn die Zahl der Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma\ldots\ldots$ gerade ist, positiv oder negativ ist, je nachdem keine oder eine von diesen Wurzeln kleiner als $v_{,}$ ist. Ist die Zahl der Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma\ldots\ldots$ ungerade, so ist im Gegentheil das Resultat positiv oder negativ, je nachdem eine oder keine von den Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma\ldots\ldots$ kleiner als $v_{,}$ ist. Da nun die Zahl der imaginairen Wurzeln immer gerade ist, so ist die Zahl der reellen Wur-

zeln α, β, γ.... der Gleichung $Fx = 0$ nothwendig gerade oder ungerade, je nachdem die Totalzahl der Wurzeln, das heisst die Ordnungs-Zahl m der Gleichung selbst, gerade oder ungerade ist.

143.

Die Form der Wurzeln einer beliebigen Gleichung $Fx = 0$ z. B. vom mten Grade lässt sich also aus ihrer abgeleiteten Gleichung $\frac{dFx}{dx} = 0$, welche immer um einen Grad niedriger ist, beurtheilen. Denn kennt man die nach ihrer Grösse geordneten reellen Wurzeln $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$.... $\nu_{,}$ der abgeleiteten Gleichung, so darf man nur dieselben der Reihe nach in die gegebene Gleichung statt x substituiren. Aus dem Resultate zeigt sich:

Erstlich, ob die gegebene Gleichung eine Wurzel hat, die grösser ist als $\alpha_{,}$ oder nicht, je nachdem $F\alpha_{,}$ kleiner oder grösser ist als Null.

Zweitens, ob sie eine Wurzel hat zwischen $\alpha_{,}$ und $\beta_{,}$ oder nicht, je nachdem $F\beta_{,}$ und $F\alpha_{,}$ entgegengesetzte oder gleiche Zeichen haben.

Drittens, ob sie eine Wurzel hat zwischen $\beta_{,}$ und $\gamma_{,}$ oder nicht, je nachdem $F\gamma_{,}$ und $F\beta_{,}$ entgegengesetzte oder gleiche Zeichen haben, u. s. w.

Endlich, ob sie eine Wurzel hat, die kleiner ist als $\nu_{,}$ oder nicht, je nachdem $\nu_{,}$, im Fall eines ungeraden m, positiv oder negativ, und im Fall eines geraden m, negativ oder positiv ist.

Man erhält durch diese Kennzeichen nicht allein

die Zahl der reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung, sondern auch ihre Grenzen; und, wenn man diese Grenzen noch in Rücksicht der Wurzeln, die grösser als $\alpha_{,}$ oder kleiner als $\nu_{,}$ sind, vervollständigen will, so darf man nur nach dem vierten Abschnitte (§. 12.) die Grenzen der positiven und negativen Wurzeln der gegebenen Gleichung überhaupt suchen.

Es ist bei Gelegenheit der Auseinandersetzung der obigen Kennzeichen der Grenzen nach Newton und Maclaurin, zu bemerken, dass Rolle sie schon kannte, wie man aus dem fünften und sechsten Kapitel des zweiten Buchs seiner Algebra sieht.

144.

Wir nahmen bis jetzt an, dass die gegebene Gleichung imaginaire Wurzeln mit den reellen gemischt enthalten könne. Wir wollen nun untersuchen, was aus der Voraussetzung folgt, dass alle Wurzeln reell sind.

Es ist zuerst klar, dass, wenn die Gleichung $Fx = 0$ vom mten Grade m reelle Wurzeln hat, ihre erste abgeleitete $\frac{dFx}{dx} = 0$ vom $m - 1$ten Grade nothwendig $m - 1$ reelle Wurzeln haben muss, weil zwischen zwei auf einander folgende reelle Wurzeln der Gleichung $Fx = 0$ nothwendig eine reelle Wurzel der Gleichung $\frac{dFx}{dx} = 0$ fällt (§. 139.). Aus demselben Grunde müssen auch alle Wurzeln der zweiten abgeleiteten Gleichung $\frac{d^2Fx}{dx^2}$ reell seyn u. s. w.

Die erste Bedingung der Realität aller Wurzeln einer gegebenen Gleichung ist also, dass die abgeleiteten Gleichungen ebenfalls sämmtlich lauter reelle Wurzeln haben. Umgekehrt jedoch kann die abgeleitete Gleichung lauter reelle Wurzeln haben, ohne dass die Stammgleichung ebenfalls lauter reelle Wurzeln hätte.

Wir wollen also annehmen, dass die $m-1$ Wurzeln $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$.... der Gleichung $\frac{dFx}{dx}=0$ sämmtlich reell sind, und untersuchen, welche Bedingungen erfüllt werden müssen, wenn auch die sämmtlichen m Wurzeln α, β, γ.... der Stammgleichung $Fx=0$ reell sind.

Da wir allgemein gezeigt haben, dass von den reellen Wurzeln der Gleichung $Fx=0$ immer nur eine zugleich zwischen zwei auf einanderfolgende Wurzeln der Gleichung $\frac{dFx}{dx}=0$ fällt, und also auch nur eine von den Wurzeln der Gleichung $Fx=0$ grösser, und nur eine kleiner als alle Wurzeln der Gleichung $\frac{dFx}{dx}=0$ seyn kann; so folgt, dass, wenn alle m Wurzeln der Gleichung $Fx=0$ reell sind, α nothwendig grösser als $\alpha_{,}$ seyn, und β zwischen $\alpha_{,}$ und $\beta_{,}$, γ zwischen $\beta_{,}$ und $\gamma_{,}$ fallen muss u. s. w. Wären nicht alle Wurzeln der Gleichung $Fx=0$ reell, so würde, weil alsdann die Zahl der reellen Wurzeln nicht grösser als $m-2$ seyn kann, und folglich kleiner ist als die Zahl der Wurzeln $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$,

$\gamma_{,}$....,

Realität der Wurzeln.

$\gamma_{,}\ldots$, eine ähnliche Reihe-Folge in diesem Falle nicht Statt finden und also irgendwo ein Zwischenraum zwischen den Wurzeln $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}\ldots$ seyn müssen, in welchen keine der Wurzeln der Gleichung $Fx = 0$ fällt, oder es würde wenigstens keine dieser Wurzeln grösser als die grösste, oder kleiner als die kleinste der Wurzeln $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}\ldots$ seyn u. s. w.

Vermöge dessen, was oben bewiesen worden (§. 142.), muss also, wenn man der Reihe nach in Fx, $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}\ldots$ statt x setzt, im Fall alle Wurzeln von $Fx = 0$ reell sind,

338. $F\alpha_{,} < 0,\ F\beta_{,} > 0,\ F\gamma_{,} < 0$ *etc.*

seyn. Im Fall nicht alle Wurzeln von $Fx = 0$ reell sind, werden einige dieser Bedingungen nicht erfüllt.

Auf der andern Seite sieht man, dass, wenn man die nämlichen Wurzeln $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}\ldots$ in die zweite abgeleitete Gleichung $\frac{d^2 Fx}{dx^2} = 0$ substituirt, wie weiter oben (§. 139.) gezeigt worden, immer

339. $\frac{d^2 F\alpha_{,}}{d\alpha_{,}^2} > 0,\ \frac{d^2 F\beta_{,}}{d\beta_{,}^2} < 0,\ \frac{d^2 F\gamma_{,}}{d\gamma_{,}^2} > 0$ *etc.*

ist. Verbindet man diese Bedingungen mit den vorigen, so folgt, dass, wenn alle Wurzeln der gegebenen Gleichung $Fx = 0$ reell sind, die Producte

340. $F\alpha_{,} \times \frac{d^2 F\alpha_{,}}{d\alpha_{,}^2},\ F\beta_{,} \times \frac{d^2 F\beta_{,}}{d\beta_{,}^2},\ F\gamma_{,} \times \frac{d^2 F\gamma_{,}}{d\gamma_{,}^2} \ldots$

nothwendig sämmtlich negativ seyn müssen. Ist solches nicht der Fall, so hat die gegebene Gleichung nothwendig imaginaire Wurzeln.

Ueber die Grenzen und die

Eine ähnliche Regel würde man finden, wenn man die Quotienten

$$341.\quad F\alpha_{\prime} : \frac{d^2F\alpha_{\prime}}{d\alpha_{\prime}^2},\ F\beta_{\prime} : \frac{d^2F\beta_{\prime}}{d\beta_{\prime}^2},\ F\gamma_{\prime} : \frac{d^2F\gamma_{\prime}}{d\gamma_{\prime}^2} \ldots,$$

oder allgemeine Functionen von der Form

$$342.\quad M(F\alpha_{\prime})^{\mu} \cdot \left(\frac{d^2F\alpha_{\prime}}{d\alpha_{\prime}^2}\right)^{\nu},\ M(F\beta_{\prime})^{\mu} \cdot \left(\frac{d^2F\beta_{\prime}}{d\beta_{\prime}^2}\right)^{\nu} \ldots$$

annähme, wo M ein positiver Coefficient oder eine nothwendig positive Function ist und μ, ν ungerade, ganze, positive oder negative Zahlen sind.

Setzt man alsdann

$$343.\quad Fx \cdot \frac{d^2Fx}{dx^2} = y,$$

oder allgemein

$$344.\quad M(Fx)^{\mu} \cdot \left(\frac{d^2Fx}{dx^2}\right)^{\nu} = y,$$

und eliminirt x zwischen dieser und der Gleichung $\frac{dFx}{dx} = 0$, deren Wurzeln $\alpha_{\prime}$, $\beta_{\prime}$, $\gamma_{\prime}$.... sind, so erhält man eine Gleichung mit y von dem nämlichen Grade wie die Gleichung $\frac{dFx}{dx} = 0$, deren Wurzeln die Werthe von y sind, welche man erhält, wenn man der Reihe nach $\alpha_{\prime}$, $\beta_{\prime}$, $\gamma_{\prime}$.... statt x setzt. Sind also diese Werthe alle negativ, so hat die Gleichung mit y nur negative Wurzeln, und folglich müssen alle ihre Glieder positiv seyn [*nach dem Cartesischen Lehrsatze*]. Umgekehrt, wenn diese Gleichung lauter positive Glieder hat, so hat sie nur negative Wurzeln, und die Werthe von y sind sämmtlich negativ

Realität der Wurzeln.

[*wie es dem Obigen zu Folge seyn muss, wenn alle Wurzeln der gegebenen Gleichung reell seyn sollen*].

145.

Hieraus folgt, dass die Kennzeichen der Realität der Wurzeln der gegebenen Gleichung $Fx = 0$ darin besteht, dass erstlich die erste abgeleitete Gleichung $\frac{dFx}{dx} = 0$ lauter reelle Wurzeln hat, und zweitens dass die Glieder der Gleichung in y, welche man erhält, wenn man x zwischen den Gleichungen $\frac{dFx}{dx} = 0$ und $Fx . \frac{d^2Fx}{dx^2} = y$, oder $M(Fx)^\mu . \left(\frac{d^2Fx}{dx^2}\right)^\nu = y$ eliminirt, sämmtlich positiv sind.

Wendet man diese nämliche Regel auf die erste abgeleitete Gleichung $\frac{dFx}{dx} = 0$ an, so folgt, dass die Kennzeichen der Realität ihrer Wurzeln darin bestehen, dass die Wurzeln der zweiten abgeleiteten Gleichung $\frac{d^2Fx}{dx^2} = 0$ sämmtlich reell, und die Glieder der Gleichung in y, welche man erhält, wenn man x zwischen der Gleichung $\frac{d^2Fx}{dx^2} = 0$ und der Gleichung $\frac{dFx}{dx} . \frac{d^3Fx}{dx^3} = y$ eliminirt, sämmtlich positiv seyn müssen u. s. w.

Um also alle Kennzeichen der Realität der Wurzeln der Gleichung $Fx = 0$ zusammen zu fassen, setze man

Erstlich

$$345.\quad Fx \cdot \frac{d^2 Fx}{dx^2} = y$$

und eliminire zwischen dieser Gleichung und der Gleichung $\frac{dFx}{dx} = 0$ die Grösse x, so erhält man die erste Gleichung mit y.

Zweitens setze man

$$346.\quad \frac{dFx}{dx} \cdot \frac{d^3 Fx}{dx^3} = y_{,}$$

und eliminire zwischen dieser Gleichung und der Gleichung $\frac{d^2 Fx}{dx^2} = 0$ die Grösse x, so erhält man eine zweite Gleichung mit $y_{,}$.

Drittens setze man

$$347.\quad \frac{d^2 Fx}{dx^2} \cdot \frac{d^4 Fx}{dx^4} = y_{,,}$$

und eliminire zwischen dieser Gleichung und der Gleichung $\frac{d^3 Fx}{dx^3} = 0$ die Grösse x, so erhält man eine dritte Gleichung mit $y_{,,}$.

u. s. w.

Die Zahl dieser Gleichungen mit $y, y_{,}, y_{,,} \ldots$ ist $m - 1$, wenn die Ordnungs-Zahl der gegebenen Gleichung m ist, weil die mte Ableitung von Fx constant ist und kein x mehr enthält.

146.

Alsdann bestehen die Kennzeichen der Realität der Wurzeln der Gleichung $Fx = 0$ darin, dass alle Glieder dieser verschiedenen Gleichungen mit $y, y_{,}$

Realität der Wurzeln.

$y_{,,}$.... sämmtlich positiv oder mit dem ersten Gliede jeder Gleichung von einerlei Zeichen seyn müssen.

Da die Gleichung $Fx = 0$ vom mten Grade seyn soll, so sind die Ableitungen $\frac{dFx}{dx} \cdot \frac{d^2Fx}{dx^2} \ldots$ und also auch die Gleichungen mit y, $y_{,}$, $y_{,,}$.... der Reihe nach vom $m-1$ten, $m-2$ten *etc.* Grade. Sie enthalten also, jede, eben so viele Bedingungen, so dass die gesammte Zahl der Bedingungen

$$m-1+m-2+m-3\ldots, \text{ oder } 1+2+3\ldots+m-1 = \frac{m(m-1)}{2}$$

ist.

Wir sahen im fünften Abschnitte (§. 28.), dass sich die Bedingungen der Realität aller Wurzeln einer Gleichung aus ihrer Differenzen-Gleichung finden lässt, deren Glieder, für den Fall der Realität, abwechselnd positiv und negativ seyn müssen, welches also so viele Bedingungen giebt, als die Differenzen-Gleichung Glieder oder Einheiten im Exponenten hat, so dass, wenn m die Ordnungszahl der gegebenen Gleichung ist, die Zahl der Bedingungen für die Realität aller ihrer Wurzeln, auf diese Weise ebenfalls $\frac{m(m-1)}{2}$ ist. Die beiden Methoden geben also eine gleiche Zahl von Bedingungen, welches um so merkwürdiger ist, da sich die Bedingungen der Realität der Wurzeln bei Gleichungen vom zweiten und dritten Grade auf eine geringere Zahl reduciren lassen, wie wir in der dritten Abtheilung des fünften Abschnitts sahen. [*Man sehe die dortigen Bemerkungen zu §. 39.*]

Das gegenwärtige Verfahren hat aber den Vorzug, dass die für die Realität der Wurzeln von beliebigen Gleichungen gefundenen Bedingungen für alle Grade passen, welches mit denen, die aus der Differenzen-Gleichung folgen, nicht der Fall ist. Man könnte auf diese Weise leicht Tafeln machen, welche, der Reihe nach, die Kennzeichen der Realität der Wurzeln gegebener Gleichungen vom zweiten Grade ab, enthalten.

147.

Um einen Versuch mit diesen Tafeln zu machen, wollen wir von der einfachsten Function von x anfangen, welche x^0 oder 1 ist. Diese wollen wir durch X bezeichnen und allmählig zu den Stammgrössen zurückgehen, welche X_1, X_2, X_3 seyn sollen, so dass X die erste Ableitung von X_1, X_1 die erste Ableitung von X_2 u. s. w. ist. [*In den gewöhnlichen Zeichen würde* $X_1 = \int X$, $X_2 = \int\int X$ *etc. seyn. Da aber das Zeichen* $\int$ *allzu unpassend ist, so habe ich die Bezeichnung des Originals beibehalten.*] Dieses giebt, wenn man noch diese Functionen mit den Zahlen 2, 3, 4 *etc.* multiplicirt, um die Brüche zu vermeiden, und der Reihe nach die Coefficienten A, B, C *etc.* addirt,

348. $$\begin{cases} X = 1 \\ X_1 = x + A \\ 2X_2 = x^2 + 2Ax + B \\ 2.3X_3 = x^3 + 3Ax^2 + 3Bx + C \\ 2.3.4X_4 = x^4 + 4Ax^3 + 6Bx^2 + 4Cx + D \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Realität der Wurzeln.

[*Es ist leicht zu sehen, dass, wie vorausgesetzt wird, z. B.* $\frac{dX_4}{dx} = X_3$, $\frac{d^2X_4}{dx^2} = X_2$ *etc. ist.*]

I. Nun setze man für die Gleichungen des zweiten Grades

349. $x^2 + 2Ax + B = 0$,

350. $y = XX_2 = x^2 + 2Ax + B$

und eliminire (nach §. 145. Erstlich) x zwischen diesen Gleichungen und $X_1 = 0$, oder $x + A = 0$, so erhält man die Grösse mit y:

351. $y + A^2 - B = 0$.

Hieraus folgt, dass

352. $A^2 - B > 0$

die Bedingung der Realität der Wurzeln der gegebenen quadratischen Gleichung (349.) ist.

II. Für die Gleichung des dritten Grades

353. $x^3 + 3Ax^2 + 3Bx + C = 0$

findet zunächst die vorige Bedingung Statt. Sodann ist

354. $\begin{cases} y_1 = 2.3\,X_1.X_3, \text{ oder} \\ y_1 = (x+A)(x^3+3Ax^2+3Bx+C) \\ = x^4+4Ax^3+3(A^2+B)x^2+(3AB+C)x+AC. \end{cases}$

Eliminirt man zwischen dieser Gleichung und der Gleichung $X_2 = 0$ oder $x^2 + 2Ax + B = 0$ die Grösse x, so findet man die Gleichung des zweiten Grades

355. $y_1{}^2 + 2(Aa - b)y_1 + a^2B - 2abA + b^2 = 0$,

wenn man, der Kürze wegen,

356. $\begin{cases} 2A^2 - 3AB + C = a \text{ und} \\ A^2B - 2B^2 + AC = b \end{cases}$

setzt. Also hat man noch folgende zwei Bedingungen:

357. $Aa - b > 0$ und $a^2 B - 2abA + b^2 > 0$.

III. Für die Gleichung des vierten Grades

358. $x^4 + 4Ax^3 + 6Bx^2 + 4Cx + D = 0$

finden zunächst die obigen drei Bedingungen Statt. Sodann setze man

359. $y_2 = (x^2 + 2Ax + B)(x^4 + 4Ax^3 + 6Bx^2 + 4Cx + D)$.

Eliminirt man vermittelst der Gleichung $X_3 = 0$, oder $x^3 + 3Ax^2 + 3Bx + C = 0$ die Grösse x, so erhält man eine Gleichung mit y_2 vom dritten Grade, welche, wenn man sie durch

360. $y_2^3 + My_2^2 + Ny_2 + P = 0$

bezeichnet, noch die drei Bedingungen

361. $M > 0$, $N > 0$ und $P > 0$

giebt u. s. w. [*Man vergleiche mit diesen Resultaten diejenigen in §.* 38 *und* 39.]

148.

Wir dürfen übrigens eine schöne Folgerung, welche de Gua aus seiner Theorie zieht, nicht übergehen. Sie ist folgende.

Setzt man nämlich in die Gleichung $Fx = 0$, $a + z$ statt x, so erhält man, vermöge der Functions-Entwickelungs-Formel [*des Taylorschen Lehrsatzes*] die verwandelte Gleichung

362. $Fa + \frac{z}{2}\frac{dFa}{da} + \frac{z^2}{2}\frac{d^2Fa}{da^2} + \frac{z^3}{2.3}\frac{d^3Fa}{da^3} \dots = 0$,

aus welcher man irgend ein Glied, z. B. mit der

Realität der Wurzeln.

Potenz z^n verschwinden machen kann, wenn man a so bestimmt, dass

$$363.\quad \frac{d^n Fa}{da^n} = 0.$$

Nun haben wir gesehen, dass, wenn alle Wurzeln der Gleichung $Fx = 0$ reell sind, die Werthe von $\frac{d^{n-1}Fx}{dx^{n-1}}$, $\frac{d^{n+1}Fx}{dx^{n+1}}$ für alle Werthe, die aus der Gleichung $\frac{d^n Fx}{dx^n} = 0$ folgen, nothwendig entgegengesetzte Zeichen haben müssen [(§. 144.)]. Also werden auch die Werthe von $\frac{d^{n-1}Fa}{da^{n-1}}$ und $\frac{d^{n+1}Fa}{da^{n+1}}$ für alle Werthe von a, die aus der Gleichung $\frac{d^n Fa}{da^n} = 0$ (363.) folgen, ebenfalls entgegengesetzte Zeichen haben. Daraus folgt, dass, wenn man irgend ein Glied der Gleichung (362.) gleich Null setzt, das diesem Gliede vorhergehende und das auf dasselbe folgende Glied nothwendig [*für den aus dem gleich Null gesetzten Gliede folgenden Werth von a*] entgegengesetzte Zeichen haben müssen, wenn alle Wurzeln der gegebenen Gleichung reell sind. Wenn also die an ein verschwindendes Glied angrenzenden Glieder gleiche Zeichen haben, so hat die gegebene Gleichung imaginaire Wurzeln. Desgleichen hat jede Gleichung, in welcher Glieder fehlen, imaginaire Wurzeln, im Fall die an die fehlenden Glieder anstossenden Glieder gleiche Zeichen haben.

Ueber die Grenzen und die

149.

Wenn alle Wurzeln einer Gleichung reell sind, so kann man die Grenzen derselben, ohne Hülfe irgend anderer Gleichungen, blos vermittelst des Cartesischen Lehrsatzes (§. 141.) finden. Denn vermindert man z. B. alle Wurzeln einer Gleichung mit x um die Grösse a, indem man $z + a$ statt x setzt, so muss die transformirte Gleichung mit $z = x - a$ nothwendig so viele Zeichenwechsel weniger haben, als positive Wurzeln der Gleichung mit x in der Gleichung mit $x - a$ negativ geworden sind, und folglich werden eben so viele positive Wurzeln unter denen der Gleichung mit x seyn, die kleiner sind als a. Stellt man also, der Reihe nach, die transformirte Gleichung mit $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$ *etc.* auf, so deutet jedes Verschwinden eines Zeichenwechsels von einer transformirten Gleichung zur andern, z. B. von der mit $x - n$ zu der mit $x - n - 1$, auf eine positive Wurzel, die kleiner ist als $n + 1$, aber nicht kleiner als n, und die also zwischen n und $n + 1$ liegt. Auf diese Weise kann man die erste Grenze der positiven Wurzeln finden. Eben so die Grenzen der negativen Wurzeln durch die Untersuchung der Zeichenfolgen in den transformirten Gleichungen mit $n + 1$, $n + 2$ *etc.*

150.

Ich weiss nicht, ob diese Bemerkung früher als in dem Memoire gemacht worden ist, welches Budan dem Institute im Jahre 1803 vorlegte, und wel-

ches der Verfasser so eben, mit Zusätzen vermehrt, unter dem Titel: „nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques“ herausgegeben hat. Der Verfasser giebt ein einfaches und elegantes Verfahren, die Coefficienten der transformirten Gleichung mit $x-1$, $x-2$ *etc.* zu finden. Und durch Anwendung des Cartesischen Satzes auf diese und andere von jenen abgeleitete transformirte Gleichungen findet man die Grenzen aller Wurzeln und ihre Werthe selbst, so genau man will. Man kann sagen, dass dieses Werk für die Auflösung numerischer Gleichungen, deren Wurzeln sämmtlich reell sind [*aber auch nur dieser*] nichts zu wünschen übrig lässt, und dass solches in diesem Betrachte ein Supplement der gegenwärtigen Abhandlung ist.

Enthält übrigens die Gleichung imaginaire Wurzeln, so könnten Zeichenwechsel von einer transformirten zur andern verschwinden, ohne dass irgend eine reelle positive Wurzel in eine negative übergeht, wie man sich leicht durch Beispiele überzeugen kann. Zu der Gleichung $x^3 - 2x^2 + bx - 11 = 0$ nämlich gehört folgende transformirte in $x-1$, $(x-1)^3 + (x-1)^2 + 5(x-1) - 6 = 0$, welche zwei Zeichenwechsel weniger hat. Demungeachtet hat sie keine Wurzel zwischen 0 und 1.

Ist dagegen die Zahl der Zeichenwechsel, welche von einer transformirten zur folgenden verschwinden, ungerade, so kann man immer auf die Existenz einer reellen positiven Wurzel schliessen; denn dieser Fall findet nicht anders Statt, als wenn das letzte Glied

Ueber die Grenz. u. die Real. der Wurz.

das Zeichen wechselt. Nun ist leicht zu sehen, dass die letzten Glieder der transformirten Gleichung mit $x - n$ und $x - n - 1$ nichts anders sind als die Resultate der Substitution von n und $n + 1$ in die gegebene Gleichung statt x, weil diese transformirte Gleichung sich auf ihr letztes Glied reducirt, wenn man $x = n$, $= n + 1$ setzt. Also muss nothwendig eine reelle Wurzel zwischen n und $n + 1$ liegen. (Erster Abschnitt §. 1.) Die transformirte Gleichung mit $x - 2$ der obigen Gleichung ist $(x-2)^3 + 4(x-2)^2 + 10(x-2) + 1 = 0$. Dieselbe hat einen Zeichenwechsel weniger als die vorige, und in der That hat die gegebene Gleichung eine Wurzel zwischen 1 und 2.

Neunter Zusatz.

Ueber die Form der imaginairen Wurzeln.

151.

Als man die allgemeinen Ausdrücke der Wurzeln von Gleichungen des dritten und vierten Grades gefunden hatte, bemerkte man, dass sich die imaginairen Wurzeln dieser Gleichungen, wie beim zweiten Grade, auf die Form $p + q\sqrt{-1}$ bringen lassen, wo p und q reelle Grössen sind. Dieses erregte die Vermuthung, dass die imaginairen Wurzeln aller Gleichungen eben die Formen haben. Inzwischen war dieser Satz allgemein nicht ohne Beweis anzunehmen. Erst nach vielen Versuchen gelang es, sich von der Richtigkeit desselben strenge zu überzeugen.

Da dieser Theil der Theorie der Gleichungen einer derjenigen ist, mit welchen sich die Analysten dieses Jahrhunderts am meisten beschäftigten, so glaube ich, wird man hier nicht ungern eine Zusammenstellung der verschiedenen dahin gehörigen Untersuchungen finden.

Ueber die Form der

152.

D'Alembert nahm die Frage zuerst aus einem allgemeinen Gesichtspuncte in seiner Abhandlung über die Winde, die in den Memoiren der Academie von Berlin vom Jahre 1746 steht.

Er beweiset zunächst, dass jede beliebige, aus so vielen imaginairen Grössen als man will, zusammengesetzte algebraische Grösse von der Form $a + b\sqrt{-1}$ immer auf die nämliche Form gebracht werden kann. Dieses ist von den Grössen, die durch Multiplication, Divison und Erhebung zu Potenzen mit ganzen Exponenten entstehen, leicht zu zeigen. Auch allgemein durch die Binomial-Entwickelung für Grössen von der Form $(a + b\sqrt{-1})^{m + n\sqrt{-1}}$. Um endliche Ausdrücke zu finden, wendete d'Alembert auf eine sinnreiche Weise die Differentiation und Integration an, indem er in der Gleichung

$$(a + b\sqrt{-1})^{m + n\sqrt{-1}} = p + q\sqrt{-1}$$

die Grössen a, b, p und q sich verändern liess.

Inzwischen muss man gestehen, dass die Anwendung der Differential-Rechnung auf eine Aufgabe wie diese, welcher unendlich kleine Grössen und Fluxionen ganz fremd sind, indem es auf eine blosse algebraische Umformung ankommt, nicht sehr natürlich ist. [*Die unendlich kleinen Grössen und Fluxionen sind wohl jeder Aufgabe fremd, denn sie sind Grössen, die keine Grössen sind.*] Die Ableitungen dagegen sind hier sehr passend und geben ein sehr

imaginairen Wurzeln.

geeignetes Beispiel von der Anwendung ihres Algorithmus in der Algebra. [*Die Algebra beruht selbst zum Theil auf den Ableitungen.*]

153.

Setzt man z. B. die identische Gleichung

$$363.\quad (x+y\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = p + q\sqrt{-1}$$

und betrachtet y als abhängig von x, desgleichen p und q als unbekannte Functionen von x, welche bestimmt werden sollen, so geben die Ableitungen der beiden Theile der Gleichung ebenfalls eine identische Gleichung. Man erhält also [*wenn man die erste Ableitung nimmt*]

$$364.\quad (m+n\sqrt{-1})(x+y\sqrt{-1})^{m-1+n\sqrt{-1}}\left(1+\frac{dy}{dx}\sqrt{-1}\right) = \frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dx}\sqrt{-1}.$$

Dividirt man diese Gleichung durch ihre Stammgleichung (363.), so erhält man

$$365.\quad \frac{(m+n\sqrt{-1})\left(x+\frac{dy}{dx}\sqrt{-1}\right)}{x+y\sqrt{-1}} = \frac{\frac{dp}{dx}+\frac{dq}{dx}\sqrt{-1}}{p+q\sqrt{-1}},$$

welche Gleichung wiederum identisch ist.

Man multiplicire den linkseitigen Theil dieser Gleichung oben und unten mit $x-y\sqrt{-1}$ und den rechtseitigen Theil derselben oben und unten mit $p-q\sqrt{-1}$, um das Wurzelzeichen $\sqrt{-1}$ aus dem Nenner wegzuschaffen, [*so erhält man*

Ueber die Form der

$$\frac{(m+n\sqrt{-1})\left(x+x\frac{dy}{dx}\sqrt{-1}-y\sqrt{-1}+y\frac{dy}{dx}\right)}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{p\frac{dp}{dx}+p\frac{dq}{dx}\sqrt{-1}+q\frac{dp}{dx}\sqrt{-1}-q\frac{dq}{dx}}{p^2+q^2}.$$

Man sondere die verschiedenartigen Theile dieser Gleichung] und setze die reellen und die unmöglichen Theile einzeln gleich, so erhält man die beiden Gleichungen

366. $$\begin{cases} \dfrac{m\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)-n\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)}{x^2+y^2}=\dfrac{p\frac{dp}{dx}+q\frac{dq}{dx}}{p^2+q^2} \\ \dfrac{n\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)+m\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)}{x^2+y^2}=\dfrac{p\frac{dq}{dx}-q\frac{dp}{dx}}{p^2+q^2}. \end{cases}$$

Hiervon nehme man die Stammgrössen, so erhält man, wenn man durch *log* die hyperbolischen Logarithmen und durch *arc tang* den zur bestimmten Tangente gehörigen Bogen bezeichnet [*nach bekannten Formeln*]

367. $$\begin{cases} m\log\sqrt{(x^2+y^2)}-n\,\mathrm{arc\,tang}\,\dfrac{y}{x}=\log\sqrt{(p^2+q^2)}+K \\ m\log\sqrt{(x^2+y^2)}+m\,\mathrm{arc\,tang}\,\dfrac{y}{x}=\mathrm{arc\,tang}\,\dfrac{q}{p}+H, \end{cases}$$

wo K und H zwei unbestimmte Constanten sind, die aus der gegebenen Stammgleichung (363.) gefunden werden müssen. Setzt man in diese Stammgleichung (363.) $y=0$ und $x=1$, so erhält man [$1^{m+n\sqrt{-1}}=p+q\sqrt{-1}$, *also weil* $1^{m+n\sqrt{-1}}$ *auch* $=1$ *ist*]

$q=0,$

imaginairen Wurzeln.

$q = 0$, $p = 1$. [*Nur einer der Werthe von* $1^{m+n\sqrt{-1}}$ *ist aber gleich Eins, die übrigen enthalten unmögliche Grössen.*] Setzt man dieses in die Gleichung (367.), so erhält man

368. $K = 0$ und $H = 0$

[*für einen Werth der vieldeutigen Grösse*].

Setzt man also, der Kürze wegen,

369. $x = u \cos z$, $y = u \sin z$,

welches

370. $u = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ und $\tang z = \frac{y}{x}$

giebt, desgleichen

371. $p = r \cos s$, $q = r \quad s$,

so geben die Gleichungen (367.) [*weil* $p^2 + q^2 = r^2$]

372. $\begin{cases} m \log u - nz = \log r \text{ und} \\ n \log u + mz = \log s, \end{cases}$

also, wenn man [*bei der ersten Gleichung* (372.)] von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht [$m \log u - nz \log e = \log r$, *oder* $\log u^m + \log {}^{-nz} = \log r$, *oder* $\log (u^m . e^{-nz}) = \log r$, *also*]

373. $r = u^m . e^{-nz}$,

wo e die Zahl ist, deren hyperbolischer Logarithme $= 1$. Hieraus [*nämlich aus* $s = n \log u + mz$ (372.) *und* $r = u^m . e^{-nz}$ (373.)] folgt, dass r und s und mithin p und q (371.) allemal reelle Grössen sind, wenn man für x, y, m und n [*in der vorausgesetzten Gleichung* (363.)] reelle Grössen annimmt.

Ueber die Form der

154.

Man kann vermittelst dieser Gleichung den Ausdruck der Wurzeln der cubischen Gleichung im irreductibeln Falle auf reelle Grössen bringen.

Wenn man nämlich die cubische Gleichung

$$374.\quad x^3 - 3Mx - 2N = 0$$

annimmt, so ist, wie bekannt, allgemein

$$375.\quad x = \sqrt[3]{(N + \sqrt{(N^2 - M^3)})} + \sqrt[3]{(N - \sqrt{(N^2 - M^3)})},$$

welches in dem irreductiblen Falle, nämlich, wenn

$$376.\quad M^3 > N^3$$

ist,

$$377.\quad x = \sqrt[3]{(N + \sqrt{(M^3 - N^2)}\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(N - \sqrt{(M^3 - N^2)}\sqrt{-1})}$$

giebt.

Für diesen Fall würde in der obigen allgemeinen Formel (363.)

$$378.\quad x = N,\ y = \sqrt{(M^3 - N^2)},\ m = \tfrac{1}{3},\ n = 0$$

und folglich [*nach* (370.)]

$$379.\quad u = \sqrt{M^3},\ \mathit{tang}\, z = \frac{\sqrt{(M^3 - N^2)}}{N},$$

mithin [*nach* (372.) *und* (373.)]

$$380.\quad s = \tfrac{1}{3}z,\ r = u^{\frac{1}{3}} = \sqrt{M},$$

also

$$381.\quad \sqrt{(N \pm \sqrt{(M^3 - N^2)}\sqrt{-1})}\,[= (x \pm y\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = p \pm q\sqrt{-1} = r\cos s \pm \sqrt{-1}\, r \sin s\ (371.) = u^{\frac{1}{3}}(\cos s \pm \sin s\sqrt{-1})] = (\cos\tfrac{1}{3}z \pm \sqrt{-1}\sin\tfrac{1}{3}z)\sqrt{M}.$$

seyn.

imaginairen Wurzeln.

Die Summe dieser beiden Wurzel-Grössen [*mit den Zeichen + und —, welche, zu Folge* (375.), *gleich x ist*] beträgt

$$382. \quad x = 2 \cos \tfrac{1}{3} z \sqrt{M}.$$

Nun gehören zu der nämlichen Tangente $\frac{\sqrt{(M^3 - N^2)}}{N}$ (379.) die drei Winkel z, $z + 2\varrho$, $z + 4\varrho$, wenn man den rechten Winkel durch ϱ bezeichnet. [*Eigentlich unzählige Winkel* z, $z + 2\varrho$, $z + 4\varrho$, $z + 6\varrho$, $z + 8\varrho$ *u. s. w. indessen ist* $\tan \frac{1}{3} z$, *wenn man* $z + 6\varrho$ *statt* z *setzt, wieder so viel als* $\tan \frac{1}{3} z$ *selbst, wenn man* $z + 8\varrho$ *statt* z *setzt, so viel als* $\tan \frac{1}{3}(z + 2\varrho)$ *u. s. w., so dass die übrigen Werthe von* z *ausser* z, $z + 2\varrho$, $z + 4\varrho$ *nicht in Betracht kommen.*] Der Ausdruck $x = 2 \cos \frac{1}{3} z \sqrt{M}$ hat also die drei verschiedenen Werthe

$$383. \quad x = 2 \cos \tfrac{1}{3} z \sqrt{M}, \quad x = 2 \cos \tfrac{1}{3} (z + 2\varrho) \sqrt{M},$$
$$x = 2 \cos \tfrac{1}{3} (z + 4\varrho) \sqrt{M}$$

[*wenn* $\tan z = \frac{\sqrt{(M^3 - N^2)}}{N}$ (379.)], welche die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung [$x^3 - 3Mx - 2N = 0$ (374.)] sind, die sich auf diese Weise durch die trigonometrischen Tafeln finden lassen.

155.

Uebrigens ist zu bemerken, dass man die Reduction gerader Wurzelgrössen auch durch blosse algebraische Operationen machen kann. Denn es sey z. B.

I. die Wurzel-Grösse

Ueber die Form der

$$384.\ \sqrt{(a+b\sqrt{-1})}$$

zu reduciren, so setze man

$$385.\ \sqrt{(a+b\sqrt{-1})}+\sqrt{(a-b\sqrt{-1})}=u.$$

Dieses giebt, wenn man die Quadrate nimmt,

$$[a+b\sqrt{-1}+a-b\sqrt{-1}\pm 2\sqrt{(a^2+b^2)}=u^2,\ \textit{oder}]$$

$$386.\ 2a+2\sqrt{(a^2+b^2)}=u^2,$$

welche Grösse immer nothwendig positiv ist, wenn man die positive Wurzel von a^2+b^2 nimmt, so dass alsdann u eine reelle Grösse ist.

Setzt man dagegen

$$387.\ \sqrt{(a+b\sqrt{-1})}-\sqrt{(a-b\sqrt{-1})}=t,$$

so findet man auf dieselbe Weise, wenn man die Quadrate nimmt,

$$388.\ 2a-2\sqrt{(a^2+b^2)}=t^2,$$

welche Grösse immer nothwendig negativ ist [*wenn man die positive Wurzel von* a^2+b^2 *nimmt*]. Setzt man also

$$389.\ t^2=-v^2,$$

so dass $t=v\sqrt{-1}$, wo nun v eine reelle Grösse ist, so erhält man [*wenn man* (385 *und* 387.) *addirt und subtrahirt*]

$$390.\ \sqrt{(a\pm b\sqrt{-1})}=\tfrac{1}{2}(u\pm v\sqrt{-1}).$$

II. Wenn

$$391.\ \sqrt[4]{(a+b\sqrt{-1})}+\sqrt[4]{(a-b\sqrt{-1})}=s,$$

so erhält man, wenn man quadrit,

$$392.\ \sqrt{(a+b\sqrt{-1})}+2\sqrt[4]{(a^2+b^2)}+\sqrt{(a-b\sqrt{-1})}=s^2$$
$$=u+2\sqrt[4]{(a^2+b^2)}\ (385.),$$

imaginairen Wurzeln.

welche Grösse nothwendig positiv ist, wenn man die positive Wurzel nimmt. Also ist s eine reelle Grösse.

Ferner sey

393. $\sqrt[4]{(a+b\sqrt{-1})} - \sqrt[4]{(a-b\sqrt{-1})} = r,$

so erhält man auf dieselbe Weise

394. $\sqrt{(a+b\sqrt{-1})} - 2\sqrt[4]{(a^2+b^2)} + \sqrt{(a-b\sqrt{-1})} = r^2$
$= u - 2\sqrt[4]{(a^2+b^2)}$ (385.),

welche Grösse nothwendig negativ ist. Denn es ist $u^2 = 2a + 2\sqrt{(a^2+b^2)}$ (386.) $< 4\sqrt{(a^2+b^2)}$ [*weil* $a < \sqrt{(a^2+b^2)}$ *ist*], folglich $u < 2\sqrt[4]{(a^2+b^2)}$ [*in sofern man die positive Wurzel von* $4\sqrt{(a^2+b^2)}$ *nimmt*]. Setzt man also

395. $r^2 = -S^2,$

so dass $r = S\sqrt{-1}$, wo nun S eine reelle Grösse ist, so erhält man [*wenn man* (392.) *und* (393.) *addirt und subtrahirt*]

396. $\sqrt[4]{(a \pm b\sqrt{-1})} = \frac{1}{2}(s \pm S\sqrt{-1})$

u. s. w.

156.

Diese Reductionen vorausgesetzt, untersucht d'Alembert eine beliebige Curve, deren Ordinate Null oder unendlich gross ist, im Fall die Abscisse x verschwindet, und bemerkt, dass man, welche auch die Gleichung der Curve sey, immer, wenn x sehr klein ist, den Werth von y vermittelst des Newton-

Ueber die Form der

schen Parallelogramms durch x in eine sehr convergirende Reihe von der Form

$$397.\quad y = ax^{\frac{m}{n}} + bx^{\frac{r}{s}} + cx^{\frac{t}{u}} \ldots$$

ausdrücken kann, wo die Exponenten von x steigend angenommen werden und wo man immer für ein positives x alle Glieder reell annehmen kann; denn man kann die positiven x den Zweigen der Curve entsprechen lassen, in welchen die y reell sind.

Nimmt man x negativ an, so sind die Glieder, in welchen die Potenzen von x gebrochene Exponenten mit geraden Nennern haben, imaginair; können aber nach dem vorigen Satze (§. 155.) immer auf die Form $p + q\sqrt{-1}$ gebracht werden, wo p und q reelle Grössen sind. Mithin ist die ganze Reihe, und folglich der Werth von y, wenn derselbe unmöglich ist, ebenfalls von dieser Form, so lange x sehr klein ist.

Nun aber kann man, welches auch der Werth von y für ein beliebiges x seyn mag, immer

$$398.\quad y = p + q\sqrt{-1}$$

setzen, wo p und q unbestimmte Grössen sind. Und da nun dieser Werth zweifach ist, weil die Wurzelgrösse $\sqrt{-1}$ zwei Werthe hat, so werden die Grössen p und q durch zwei Gleichungen ausgedrückt, die man erhält, wenn man in die Gleichung der Curve $p + q\sqrt{-1}$ statt y, und sodann die ganz reellen und die ganz imaginairen Theile einzeln gleich Null setzt. Diese Gleichungen enthalten die Grössen

imaginairen Wurzeln.

p und q mit einander vermischt, aber man kann sie durch bekannte Verfahren in zwei andere verwandeln, deren eine nur p und x, die andere nur q und x enthält.

Wäre nun y nicht immer von der Form $p + q \sqrt{-1}$, wo p und q für jeden Werth von x reelle Grössen sind, so sey a der grösste Werth von x, für welchen y von der Form $p + q\sqrt{-1}$ ist, und $p = b$, $q = c$ für $x = a$. Man setze $x = a + k$ und $p = b + r$, $q = c + s$. Substituirt man diese Werthe in die beiden Gleichungen mit p und q, so erhält man zwei Gleichungen zwischen r und k, und s und k, in welchen für $k = 0$, $r = 0$ und $s = 0$ ist, und in welchen, dem obigen Beweise zu Folge, r und s von der Form $p + q\sqrt{-1}$ sind, wenn k sehr klein ist, und also r und s unmögliche Grössen sind. Man erhält also $r = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ und $s = \gamma + \delta\sqrt{-1}$, wo α, β, γ, δ reelle Grössen sind, also $p = b + \alpha + \beta\sqrt{-1}$, $q = c + \gamma + \delta\sqrt{-1}$, und folglich $y = b + \alpha - \delta + (\beta + c + \gamma\sqrt{-1})$, welches ebenfalls die Form $p + q\sqrt{-1}$ hat. Also ist nicht, wie vorausgesetzt wurde, a der grösste Werth von x, für welchen y die Form $p + q\sqrt{-1}$ hat. Folglich behält y immerfort diese Form, welches auch der Werth von x seyn mag.

Dieser Schluss lässt sich offenbar auf Gleichungen von beliebigem Grade mit einer unbekannten Grösse anwenden. Denn es sey y die unbekannte Grösse der Gleichung, deren letztes Glied x ist, so erhält man eine Gleichung zwischen x und y, in

welcher $x = 0$, $y = 0$ giebt, und auf welche der obige Beweis passt. Was also auch der Werth des letzten Gliedes x seyn mag, immer ist derselbe, wenn er zu einer imaginairen Grösse wird, von der Form $p + q\sqrt{-1}$.

Hat nun die Gleichung eine Wurzel von der Form $p + q\sqrt{-1}$, so muss sie nothwendig eine zweite Wurzel von der Form $p - q\sqrt{-1}$ haben, weil die Rechnung für beide, wegen der Zweifachheit des Zeichens von $\sqrt{-1}$, die nämliche ist. Sie hat also die beiden Factoren $y - p - q\sqrt{-1}$ und $y - p + q\sqrt{-1}$, welche den reellen Factor zweiter Ordnung $y^2 - 2py + p^2 + q^2$ geben, und ist folglich durch diesen Factor theilbar, welches dann die Ordnungs-Zahl der Gleichung um 2 vermindert. Auf die entstehende Gleichung kann man die nämlichen Schlüsse anwenden u. s. w.

157.

Dieser Beweis ist unvollständig. Denn obgleich sich aus einer Gleichung mit zwei unbestimmten Grössen die eine dieser beiden Grössen immer durch eine Reihe mit steigenden Potenzen der andern Grösse ausdrücken lässt, so kann es doch kommen, dass die Coefficienten der Glieder dieser Reihen selbst von Gleichungen abhängen, welche keine reelle Wurzeln haben; alsdann erscheinen in den Reihen neue unmögliche Grössen, ausser denen, welche von den Potenzen der unbestimmten Grösse herrühren.

Es lässt sich aber auf die nämlichen Grundsätze

imaginairen Wurzeln.

ein strengerer Beweis gründen, der zugleich allgemeiner und einfacher ist.

Es sey nämlich die Gleichung

$$399.\quad x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots + V = 0$$

gegeben, welche wir, der Kürze wegen, durch

$$400.\quad fx + V = 0$$

bezeichnen wollen, wo also fx eine rationale und nicht gebrochene Function von x ist, die x in allen Gliedern enthält. Wir nehmen an, dass diese Gleichung keine reelle Wurzeln hat. Hätte sie dergleichen, so könnte man dieselben durch Division der Gleichung mit den den reellen Wurzeln entsprechenden einfachen Factoren wegschaffen.

Es ist klar, dass die gegebene Gleichung, wenn sie, wie sie ist, nämlich mit bestimmten Coefficienten, keine reelle Wurzeln hat, dergleichen blos durch Veränderung des letzten Gliedes V bekommen kann. Denn man nehme eine beliebige Grösse K und setze $V = fK$, so hat die Gleichung

$$fx - fK = 0$$

die reelle Wurzel $x = K$ [*denn für* $x = K$ *ist* $fx - fK = 0$]. Man nehme also irgend eine der imaginairen Wurzeln der Gleichung $fx + V = 0$, welche durch die Veränderung von V in eine reelle Wurzel übergeht, und setze, sie bleibe nur imaginair, so lange V zwischen den Grenzen a und b liegt, wo $b > a$ ist, so dass also x in der Gleichung $fx + a = 0$ irgend einen reellen Werth α, in der Gleichung $fx + b = 0$ irgend einen reellen Werth β hat, in

Ueber die Form der

den Gleichungen $fx+a+k=0$ und $fx+b-k=0$ aber, wo k eine beliebige positive Grösse bedeutet, die so klein seyn kann, als man will, imaginair ist. Der imaginaire Werth von x in der Gleichung $fx+a+k=0$ sey $\alpha+u$, so geht die Grösse fx, vermöge der bekannten [*Taylorschen*] Entwickelungs-Formel, wenn man $\alpha+u$ statt x setzt, in $f\alpha+u\frac{df\alpha}{d\alpha}+\frac{u^2}{2}\frac{d^2f\alpha}{d\alpha^2}\ldots$ über. Da aber α die Wurzel der Gleichung $fx+a=0$ ist, so ist $f\alpha+a=0$, also $a=-f\alpha$; folglich geht die Gleichung $fx+a+k=0$ in

$$u\frac{df\alpha}{d\alpha}+\frac{u^2}{2}\frac{d^2f\alpha}{d\alpha^2}\ldots+k=0$$

über. Ist nun der Coefficient $\frac{df\alpha}{d\alpha}$ nicht Null, so kann man u, wenn man k nach Belieben sehr klein annimmt, immer durch eine sehr convergente und ganz reelle Reihe finden. Man erhält zunächst $u=-\frac{k}{\frac{df\alpha}{d\alpha}}$ und sodann, wenn man diesen ersten Werth von u substituirt,

$$u=-k:\frac{df\alpha}{d\alpha}-\frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2f\alpha}{d\alpha^2}:\left(\frac{df\alpha}{d\alpha}\right)^3\right)$$

und so weiter. [*Man setze, der Kürze wegen,* $\frac{df\alpha}{d\alpha}=\alpha$, $\frac{d^2f\alpha}{2d\alpha^2}=\beta$, $\frac{d^3f\alpha}{d\alpha^3}=\gamma$ *etc., also*

$$\alpha u+\beta u^2+\gamma u^3\ldots=-k.$$

Nun setze man

imaginairen Wurzeln.

$$u = ak + bk^2 + ck^3 \ldots,$$

so ist

$$\alpha(ak + bk^2 + ck^3 \ldots) = -k$$
$$+ \beta(a^2k^2 + 2abk^3 \ldots)$$
$$+ \gamma(a^3k^3 \ldots),$$

also

$$\alpha a = -1$$
$$\alpha b + \beta a^2 = 0$$
$$\alpha c + 2\beta ab + \gamma a^3 = 0$$

etc. Daraus folgt

$$a = -\frac{1}{\alpha},\ b = -\frac{\beta a^2}{\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha^3}\ etc.,$$

also

$$u = -\frac{1}{\alpha}.k - \frac{\beta}{\alpha^3}.k^2 \ldots,$$

oder

$$u = -k : \frac{df\alpha}{d\alpha} - \frac{k^2}{2}.\left(\frac{d^2f\alpha}{d\alpha^2} : \left(\frac{df\alpha}{d\alpha}\right)^3\right) \ldots,$$

wie im Text.] Also würde u gegen die Voraussezzung eine reelle Grösse seyn.

Damit u imaginair sey, müsste also $\frac{df\alpha}{d\alpha} = 0$ seyn, welches

$$\frac{u^2}{2}\frac{d^2f\alpha}{d\alpha^2} + \frac{u^3}{2.3}\frac{d^3f\alpha}{d\alpha^3} \ldots + k = 0$$

giebt, wo der erste Werth von u, den man [*auf eine ähnliche Weise, wie vorhin*] Näherungsweise erhält $\sqrt{\left(-2k : \frac{d^2f\alpha}{d\alpha^2}\right)}$ ist, welcher Werth reell oder imaginair ist, je nachdem $\frac{d^2f\alpha}{d\alpha^2}$ negativ oder positiv ist, weil k immer positiv angenommen wird.

Ueber die Form der

Ist der erste Werth von u reell, so ist leicht zu sehen, dass alle folgende es ebenfalls sind und folglich auch der ganze Werth von u reell ist. Ist $\frac{d^2 f\alpha}{d\alpha^2}$ positiv, so ist der erste Werth von u imaginair und von der Form $\sqrt{\left(\frac{2k}{\frac{d^2 f\alpha}{d\alpha^2}}\right)} \cdot \sqrt{-1}$. Die folgenden Werthe sind reell oder imaginair von der nämlichen Form, so dass der ganze Werth von u von der Form $p + q\sqrt{-1}$ ist, wo p und q reell sind.

Aber wäre zugleich $\frac{d^2 f\alpha}{d\alpha^2} = 0$, so wäre die Gleichung

$$\frac{u^3}{2.3} \frac{d^3 f\alpha}{d\alpha^3} + \frac{u^4}{2.3.4} \frac{d^4 f\alpha}{d\alpha^4} \ldots + k = 0,$$

und es ist leicht zu sehen, dass wieder der Werth von u nicht anders reell seyn kann, als wenn das Glied u^3 verschwindet und $\frac{d^4 f\alpha}{d\alpha^4}$ positiv ist. Denn in diesem Falle wäre $u = \sqrt[4]{\frac{2.3.4.k}{\frac{d^4 f\alpha}{d\alpha^4}}} \cdot \sqrt[4]{-1}$. Nach (§. 155.) aber kann $\sqrt[4]{-1}$ auf die Form $m + n\sqrt{-1}$ gebracht werden, wo m und n reelle Grössen sind; also ist der erste sich nähernde Werth von u von der Form $p + q\sqrt{-1}$, und die folgenden Werthe haben ebenfalls diese Form, so dass auch der ganze Werth von u diese Form hat u. s. w.

imaginairen Wurzeln.

158.

Hieraus folgt, dass, wenn eine Wurzel α der Gleichung $fx + a = 0$ in dem Uebergange vom Reellen zum Imaginairen liegt, nicht blos $f\alpha + a = 0$, sondern auch $\frac{df\alpha}{d\alpha} = 0$ und $\frac{d^2f\alpha}{d\alpha^2} > 0$ ist, und dass wenn $\frac{d^2f\alpha}{d\alpha^2} = 0$ ist, auch ausserdem noch $\frac{d^3f\alpha}{d\alpha^3} = 0$ und $\frac{d^4f\alpha}{d\alpha^4} > 0$ ist u. s. w.

Setzt man nun $fx + a = Fx$, so ist $\frac{dfx}{dx} = \frac{dFx}{dx}$, $\frac{d^2fx}{dx^2} = \frac{d^2Fx}{dx^2}$ u. s. w. Also ist $\frac{df\alpha}{d\alpha} = 0$, zu Folge (§. 140.), die Bedingung, unter welcher $fx + a = 0$ eine zweifache Wurzel hat; $\frac{d^2f\alpha}{d\alpha^2} = 0$ ist die Bedingung einer dreifachen Wurzel in $fx + a = 0$, u. s. w.

Daraus folgt, dass eine Wurzel nicht vom Reellen zum Imaginairen übergehen kann, ohne zweifach, vierfach, überhaupt gerade-vielfach zu werden.

Auf dieselbe Weise lässt sich zeigen, dass, wenn man in die Gleichung $fx + b - k = 0$, $x = \beta + u$ setzt, alsdann der Werth von u nicht anders imaginair seyn kann, als wenn $\frac{df\beta}{d\beta} = 0$ und $\frac{d^2f\beta}{d\beta^2} < 0$. Ist $\frac{d^2f\beta}{d\beta^2} = 0$, so muss ausserdem $\frac{d^3f\beta}{d\beta^3} = 0$ und $\frac{d^4f\beta}{d\beta^4} < 0$ seyn u. s. w. Woraus folgt, dass beim

Ueber die Form der

Uebergange vom Reellen zum Imaginairen die Wurzel ebenfalls zweifach, vierfach u. s. w. wird.

Dieser Satz war bis jetzt nur durch die Theorie der Curve bewiesen, oder eine Folge des Satzes von der Form der imaginairen Wurzeln.

159.

Nun hat, im Fall V der Grenze a und b sehr nahe liegt, eine der imaginairen Wurzeln der Gleichung $fx + V = 0$ nothwendig die Form $p + q\sqrt{-1}$ [*wie in (§. 157.) bewiesen*]. Angenommen, die Wurzel habe nicht für alle Werthe von V im Umfange der Grenzen die nämliche Form, so sey c der grösste Werth von V, für welchen noch die Form Statt findet, so dass in der Gleichung $fx + c = 0$, $x = m + n\sqrt{-1}$ ist, wo m und n reelle Grössen sind. Hingegen sey $m + n\sqrt{-1} + u$ der Werth von x für $V = c + x$, wo x eine beliebige positive sehr kleine Grösse ist. Alsdann ist

$$400. \quad \begin{cases} f(m + n\sqrt{-1}) + c = 0 \text{ und} \\ f(m + n\sqrt{-1} + u) + c + k = 0. \end{cases}$$

Man entwickele die zweite Gleichung nach u und ziehe die erste davon ab, so erhält man [*wenn man, der Kürze wegen,* $m + n\sqrt{-1} = z$ *setzt*

$$fz + c = 0$$
$$f(z + u) + c + k = 0$$

und

$$fz + c = 0$$
$$fz + u\frac{dfz}{dz} + \frac{u^2}{2}\frac{d^2fz}{dz^2} \dots + c + k = 0;$$

imaginairen Wurzeln.

also, die erste von der zweiten abgezogen,]

$$401. \quad u\frac{dfz}{dz} + \frac{u^2}{2}\frac{d^2fz}{dz^2} \ldots\ldots + k = 0.$$

In dieser Gleichung enthalten die Grössen $\frac{dfz}{dz}$, $\frac{d^2fz}{dz^2}$ nur [*entwickelt*] Polynome von $z = m + n\sqrt{-1}$ [*weil z an die Stelle des x der gegebenen Gleichung tritt und x nur in Potenzen von ganzen positiven Exponenten vorkommt*], und diese Polynome können immer auf die Form $p + q\sqrt{-1}$ gebracht werden [*wie schon aus dem binomischen Lehrsatz folgt*]. Bezeichnen also M, N, P, Q reelle Grössen, so kann die Gleichung (401.) auf

$$402. \quad u(M+N\sqrt{-1}) + \frac{u^2}{2}(P+Q\sqrt{-1}) \ldots\ldots + k = 0$$

gebracht werden.

Nimmt man hieraus Näherungsweise den Werth von u, so erhält man [*durch Umkehrung der Reihe wie in* (§. 157.)] für die erste Annäherung an u,

$$403. \quad u = -\frac{k}{M+N\sqrt{-1}} = -\frac{k(M-N\sqrt{-1})}{M^2+N^2},$$

welcher Ausdruck von der Form $p + q\sqrt{-1}$ ist. Auch die übrigen Glieder der Reihe für u, die man so convergent machen kann als man will, wenn man das willkürliche k hinreichend klein annimmt, werden diese Form haben, so dass die ganze Reihe ebenfalls diese Form hat. Man erhält also für einen hinreichend kleinen Werth von k überhaupt

$$u = r + s\sqrt{-1},$$

Ueber die Form der

so dass der Werth von x [*welcher* $m + n\sqrt{-1} + u$ *war*]

404. $x = m + r + (n + s)\sqrt{-1}$

und folglich ebenfalls von der Form $p + q\sqrt{-1}$ ist; gegen die Voraussetzung. Es giebt also keinen Werth von V zwischen den Grenzen a und b, für welchen nicht die Wurzel x immer die Form $p + q\sqrt{-1}$ hätte.

Wäre in (401.) $\frac{dfz}{dz} = 0$, so wäre daselbst

405. $\frac{u^2}{2} \cdot \frac{d^2fz}{dz^2} + \frac{u^3}{2.3} \cdot \frac{d^3fz}{dz^3} \ldots + k = 0,$

und es lässt sich wiederum zeigen, dass u immer die Form $p + q\sqrt{-1}$ hat u. s. w.

Dieser Beweis hat den Vortheil, dass er sich gleichmässig auf logarithmische und Kreis-Functionen, überhaupt auf jede Gleichung von der Form $Fx = 0$, deren erste Ableitung auf die Form $p + q\sqrt{-1}$ gebracht werden kann, wenn man $x = m + n\sqrt{-1}$ setzt, anwenden lässt. Denn alsdann sind alle übrige Ableitungen $\frac{d^2fx}{dx^2}$, $\frac{d^3Fx}{dx^3}$.... von der nämlichen Form. Die weitere Auseinandersetzung dieser Behauptung würde uns von unserm Gegenstande [*bei welchem nur rationale Functionen von x vorkommen*] zu weit entfernen.

160.

Wir fanden, dass in Gleichungen, welche imaginaire Wurzeln enthalten, deren wenigstens zwei von

imaginairen Wurzeln.

von der Form $p + q\sqrt{-1}$ sind. Die Werthe von p und q kann man nach dem zweiten Abschnitte (§. 17.) finden, und die Gleichung ist dann durch

406. $x^2 - 2px + p^2 + q^2 = 0$

[*nämlich durch das Product* $(x - p - q\sqrt{-1})$ $(x - p + q\sqrt{-1})$] theilbar. Nach der Division enthält sie nur noch die andern imaginairen Wurzeln, und wendet man auf dieselben das nämliche Raisonnement an, so lässt sich auf dieselbe Weise zeigen, dass zwei von diesen Wurzeln wieder nothwendig die Form $p \pm q\sqrt{-1}$ haben müssen u. s. w.

Obgleich der obige Beweis zureicht, die Richtigkeit des Satzes [*dass die Wurzeln einer Gleichung immer auf die Form* $p + q\sqrt{-1}$ *gebracht werden können*] nachzuweisen, so muss man doch gestehen, dass derselbe indirect, und also noch ein anderer zu wünschen sey, welcher unmittbar aus der Natur des Gegenstandes genommen ist.

In der That bemerkten wir so eben, dass jede imaginaire Wurzel von der Form $p + q\sqrt{-1}$ den reellen Factor des zweiten Grades $x^2 - 2px + p^2 + q^2$ (406.) voraussetzt. Es käme also nur darauf an zu zeigen, dass jede Gleichung durch reelle Factoren des ersten und zweiten Grades theilbar ist; und da die Gleichungen, deren höchste Exponenten ungerade Zahlen sind, immer eine reelle Wurzel haben und folglich immer durch einen Factor des ersten Grades theilbar sind, weswegen sie sich immer auf einen um Eins niedrigern Grad bringen lassen, so darf man nur blos die Glei-

Ueber die Form der

chungen untersuchen, deren höchste Exponenten gerade Zahlen sind.

161.

Descartes fand, dass die Gleichung des vierten Grades

$$407.\quad x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

die beiden Factoren zweiten Grades

$$408.\quad x^2 \pm yx + \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{2}p \mp \tfrac{1}{2}\frac{q}{y} = 0$$

hat, wo die Grösse y von der Gleichung

$$409.\quad y^6 + 2py^4 + (p^2 - 4r)y^2 - q^2 = 0$$

abhängt. Da das letzte Glied dieser Gleichung negativ ist, so hat sie nothwendig eine reelle Wurzel (erster Abschnitt §. 3.), folglich sind die beiden Factoren (403.) nothwendig reell, wenn man den reellen Werth von y setzt.

Hudde hat hierauf in seiner Abhandlung „de reductione aequationum," welche als Anhang zum Schötenschen Commentar über die Geometrie des Descartes gedruckt ist, die allgemeine Gleichung vom sechsten Grade untersucht und gefunden, dass diese Gleichung durch eine Gleichung des zweiten Grades wie $x^2 - yx + u = 0$ theilbar ist, in welcher der Coefficient y von einer Gleichung des fünften Grades abhängt, der Coefficient u aber eine rationale Function von y ist. Nun hat eine Gleichung des fünften Grades nothwendig eine reelle Wurzel, also kann der Divisor des zweiten Grades, wenn man

imaginairen Wurzeln.

darin den reellen Werth von y substituirt, immer reell seyn, so dass sich alsdann die Gleichung [*nämlich durch die Division mit diesem Divisor des zweiten Grades*] auf den vierten Grad reduciren lässt, welche nunmehr abermals zwei reelle Divisoren vom zweiten Grade hat.

Hudde ist nicht weiter gegangen, und da er die Gleichung des fünften Grades nur dadurch fand, dass er die Rechnung ihrer ganzen Länge nach ausführte, so musste er wohl finden, dass die Gleichung für höhere Grade ihrer Weitläufigkeit wegen unausführbar sey.

162.

Man findet am Schlusse der Algebra von Saunderson, welche im Jahre 1740, nach seinem Tode gedruckt ist, die wichtige Bemerkung, dass in dem Divisor einer Gleichung des vierten Grades, nämlich in $x^2 - yx + u = 0$, die Gleichung, von welcher der Coefficient y abhängt, deshalb vom sechsten Grade seyn muss, weil der Coefficient y die Summe zweier Wurzeln der gegebenen Gleichung des vierten Grades ist. Diese Gleichung mit y muss nämlich auf diese Weise alle die verschiedenen Summen zu Wurzeln haben, welche sich aus den Wurzeln der gegebenen Gleichung, zu zweien genommen, zusammensetzen lassen. Und da die Zahl dieser Summen sechs ist, so muss die Gleichung mit y nothwendig vom sechsten Grade seyn, wie Descartes sie fand. Der Verfasser wendet aber diese Bemerkung nur auf ein

Ueber die Form der

einzelnes Beispiel an und gründet darauf weiter keine Folgerung.

Le Sulur, einer der Commentatoren der principia von Newton hat dieses Resultat in einem kleinen Werke über die Integral-Rechnung, welches zu Rom im Jahre 1748 gedruckt ist, allgemein gemacht. Er beweiset durch die Theorie der Combinationen, dass, wenn man eine Gleichung vom mten Grade durch eine Gleichung vom nten Grade, wo $n < m$ ist, dividiren will, die Coefficienten dieser letzten Gleichung nothwendig von Gleichungen des $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{2 \cdot 3 \ldots n}$ten Grades abhängen müssen, weil jeder Divisor offenbar mit der gegebenen Gleichung n Wurzeln gemein haben muss, und also soviel Divisoren vorhanden seyn müssen, als n Dinge sich aus m Dingen nehmen lassen. Er schliesst daraus, dass jede Gleichung vom $4m+2$ten Grade immer durch einen Divisor vom zweiten Grade theilbar seyn muss, weil dieser Factor alsdann von einer Gleichung abhängt, deren höchster Exponent eine ungerade Zahl ist, also alsdann allemal einen reellen Werth hat. Hieraus lässt sich indessen nichts von der Realität der Divisoren des zweiten Grades für Gleichungen schliessen, deren Ordnungs-Zahl nicht von der Form $4m+2$ ist, weil diese Divisoren alsdann von Gleichungen abhängen, deren höchste Exponenten gerade Zahlen sind.

imaginairen Wurzeln.

163.

Euler hat diesen Gegenstand in einer, in der Sammlung der Berliner Academie vom Jahre 1749, im Jahre 1751 gedruckten Abhandlung weiter ergründet. Er hat sich insbesondere zu zeigen bemüht, dass eine Gleichung, deren höchster Exponent eine Potenz von 2 ist, allemal in zwei reelle Gleichungen zerlegt werden kann, deren Grad kleiner ist als die Hälfte. Er setzt zu dem Ende, dass in der gegebenen Gleichung das zweite Glied Null ist, in welchem Fall der Coefficient des zweiten Gliedes in den beiden Factoren-Gleichungen der nämliche ist, blos mit entgegengesetzten Zeichen. Er findet durch die Theorie der Combinationen, dass dieser Coefficient von einer Gleichung, deren Ordnungs-Zahl ein ungerades Vielfache einer geraden Zahl ist [*d'un degré impairement pair*] die keine ungerade Potenzen hat und deren letztes Glied das Quadrat einer Function der Wurzeln der gegebenen Gleichung mit dem Zeichen — ist, abhängt.

Euler nimmt an, dass diese Function der Wurzeln immer ohne Irrationalität aus den Coefficienten der gegebenen Gleichung gefunden werden kann; er schliesst, dass deshalb das Quadrat desselben nothwendig positiv ist, und dass folglich die Gleichung, welche den Coefficienten bestimmt, zwei reelle Wurzeln hat. Dieses ist wirklich für Gleichungen vom vierten Grade der Fall, wie man aus den obigen Descartischen Ausdrücken sieht. Aber für Gleichungen

höherer Ordnungen ist wohl noch ein Beweis a priori nöthig, den Euler nicht gegeben hat, der aber um so nöthiger ist, da die Function, weil sie nicht alle Wurzeln auf dieselbe Weise enthält, nicht durch rationale Functionen der Coefficienten bestimmt werden zu können scheint, welche, wie bekannt, an sich selbst Functionen sind, in welchen alle Wurzeln gleichmässig vorkommen.

Euler untersucht ferner die Gleichungen, deren höchste Exponenten durch die Zahlen $2k$, $4k$, $8k$ *etc.* ausgedrückt werden, wenn k irgend eine ungerade Zahl bedeutet, und findet, dass sie reelle Divisoren von der zweiten, vierten, achten etc. Ordnung haben, weil die Gleichungen, von welchen diese Divisoren abhängen, sämmtlich von ungerader Ordnung sind; so dass auf diesem Wege jede Gleichung in reelle Gleichungen, deren höchste Exponenten eine Potenz von Zwei sind, zerlegt werden kann. Aber alsdann bleibt in der Eulerschen Theorie, wenn diese Gleichungen den vierten Grad übersteigen, noch die Schwierigkeit übrig, dieselben weiter zu zerlegen.

164.

Diese Schwierigkeit lässt sich, wie Foncenex im ersten Bande der Turiner Memoiren vom Jahre 1759 gezeigt hat, vermindern, wenn man nur Divisoren vom zweiten Grade annimmt. Denn der höchste Exponent der gegebenen Gleichung sey $2^{\mu}\nu$, wo ν eine ungerade Zahl ist, so findet man, wenn man die gegebene Gleichung durch die Gleichung des

imaginairen Wurzeln.

zweiten Grades

$$410.\quad x^2 - ux + V = 0$$

zu dividiren sucht, durch die Theorie der Combinationen, dass der Coefficient u in dieser Gleichung von einer Gleichung des $\frac{2^\mu \nu(2^\mu \nu - 1)}{2} =$

$$411.\quad 2^{\mu-1}\nu(2^\mu \nu - 1) = 2^{\mu-1}\pi \text{ten}$$

Grades abhängt, wo π, wie man sieht, eine ungerade Zahl ist.

Ist also z. B. $\mu = 1$, so ist diese Gleichung von ungerader Ordnung und hat folglich nothwendig eine reelle Wurzel, so dass, weil sich das letzte Glied allgemein durch eine rationale Function von u ausdrücken lässt, die gegebene Gleichung einen rationalen Divisor zweiter Ordnung hat und mittelst dieses Divisors auf eine Gleichung gebracht werden kann, deren Grad um zwei niedriger ist.

Ist μ grösser als Eins, so suche man auf dieselbe Weise die Gleichung mit u durch eine Gleichung zweiter Ordnung wie

$$412.\quad u^2 - tu + T = 0$$

zu dividiren, so wird der Coefficient von einer Gleichung der

$$413.\quad \frac{2^{\mu-1}\pi(2^{\mu-1}\pi - 1)}{2} = 2^{\mu-2}\pi(2^{\mu-1}\pi - 1) = 2^{\mu-2}\varrho \text{ten}$$

Ordnung abhangen, wo ϱ, wie man sieht, eine ungerade Zahl ist. Das Glied T wird sich wieder allgemein durch eine rationale Function von t ausdrükken lassen.

Wenn also $\mu = 2$ ist, so wird diese Gleichung ungerader Ordnung seyn, und eine reelle Wurzel haben. Also werden t und T reelle Werthe haben, und die Gleichung $u^2 - ut + T = 0$ wird für u reelle oder imaginaire Werthe von der Form $p + q\sqrt{-1}$ geben. Im ersten Falle werden u und V reelle Grössen seyn, im zweiten werden diese Grössen imaginair seyn und die nämliche Form haben, weil V eine rationale Function von u ist. Die Gleichung $x^2 - ux + V = 0$ giebt $x = \frac{1}{2}u \pm \sqrt{(\frac{1}{4}u^2 - V)}$, welches sich durch die Reduction der imaginairen Wurzeln ebenfalls auf die Form $p + q\sqrt{-1}$ bringen lässt.

Ist μ grösser als 2, so setzt man die nämliche Rechnung weiter fort und dividirt die Gleichung in t, vom Grade $2^{\mu-2}\varrho$, durch eine Gleichung des zweiten Grades wie

$$414. \quad t^2 - st + S = 0.$$

Dieses giebt zur Bestimmung von s eine Gleichung vom

$$415. \quad \frac{2^{\mu-2}\varrho(2^{\mu-2}\varrho-1)}{2} = 2^{\mu-3}\varrho(2^{\mu-2}\varrho-1) = 2^{\mu-3}\sigma \text{ ten}$$

Grade, wo σ, wie man sieht, ungerade ist, und die Grösse S ist wieder im Allgemeinen eine rationale Function von s.

Wenn also $\mu = 3$, so hat diese Gleichung, da sie von ungerader Ordnung ist, eine reelle Wurzel; also sind s und S reelle Grössen, mithin giebt die Gleichung $t^2 - st + S = 0$ für t entweder einen

imaginairen Wurzeln.

reellen oder imaginairen Werth von der Form $p + q \sqrt{-1}$. Folglich haben in der Gleichung $u^2 - tu + T = 0$ die Coefficienten t und T reelle oder imaginaire Werthe von der nämlichen Form. Daraus folgt, dass auch u, reell oder imaginair, von der Form $p + q\sqrt{-1}$ ist, wie wir oben sahen, weil $u = \frac{1}{2}t \pm \sqrt{(\frac{1}{4}u^2 - T)}$. Also giebt auch endlich die Gleichung $x^2 - ux + V = 0$ für x einen reellen oder imaginairen Werth von der nämlichen Form.

Ist μ auch grösser als 3, so wiederholt man die Rechnung abermals und kommt zuletzt nothwendig auf einen Divisor zweiter Ordnung, dessen Coefficienten reell sind. Von diesem geht man allmählig zu den frühern Divisoren zweiter Ordnung zurück, und wird dann finden, dass ihre Coefficienten, entweder reell oder imaginair, von der Form $p + q\sqrt{-1}$ sind, bis zu dem Divisor $x^2 - ux + V = 0$ der gegebenen Gleichung, welcher ebenfalls für x einen reellen oder imaginairen Werth von der Form $p + q\sqrt{-1}$ giebt.

Dieses ist der Beweis von Foncenex. Man sieht, dass derselbe ganz strenge ist, wenn man zugiebt, dass die Coefficienten der Gleichung zweiter Ordnung, welche ein Divisor einer Gleichung nter Ordnung ist, nur von einer einzelnen Wurzel der Gleichung vom Grade $\frac{n(n-1)}{2}$ abhängen. Dieses ist im Allgemeinen wahr, aber ich habe seitdem bemerkt, dass Ausnahmen Statt finden, durch welche gegen den Beweis Zweifel entstehen. Sucht man

nämlich ein Polynom von irgend einer Ordnung m durch ein anderes Polynom von der niedrigern Ordnung n theilbar zu machen, entweder auf die Weise, dass man, wie gewöhnlich, wirklich dividirt und hernach jedes Glied des Restes gleich Null setzt, oder durch Multiplication des Polynoms mit einem andern von der $m-n$ten Ordnung und durch Vergleichung der Glieder des Products mit den Gliedern des gegebenen Polynoms: so lassen sich durch allmählige Elimination, wenn man immer einen der Coefficienten des dividirenden Polynoms ausschliesslich als unbekannte Grösse annimmt, die übrigen Coefficienten des nämlichen Polynoms durch rationale Functionen der ersten Coefficienten bestimmen, und es lässt sich durch Substitution eine Gleichung finden, welche keine unbekannten Grössen weiter als jene erste Coefficienten enthält, und welche nach diesen Coefficienten von der $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n}$ten Ordnung ist, wie wir schon oben bemerkten.

165.

Aber wenn diese Gleichung zwei oder drei gleiche Wurzeln hat und nicht die übrigen Coefficienten, welche diesen gleichen Wurzeln entsprechen, unter sich gleich sind, welches nur der Fall ist, wenn der nämliche Divisor selbst zwei, drei etc. mal vorkommt: so ist klar, dass alsdann diese Werthe der Coefficienten nicht mehr durch rationale Functionen der nämlichen Wurzeln ausgedrückt werden können,

imaginairen Wurzeln.

sondern selbst von Gleichungen des zweiten, dritten etc. Grades abhängen, je nach der Zahl der gleichen Wurzeln. In diesem Falle sind die gefundenen Ausdrücke der rationalen Functionen, wenn man darin eine der gleichen Wurzeln substituirt, unbestimmt, weil Zähler und Nenner zugleich verschwinden; und kommt man auf die Eliminationen, so wird man durch eine Gleichung des zweiten, dritten etc. Grades aufgehalten, weil die Gleichung, mit welcher man sie vergleichen muss, um sie um einen Grad zu erniedrigen, mit jener identisch ist. Man kann sich hiervon durch die Ausführung der Rechnung überzeugen, und wir werden solches in dem folgenden Zusatze allgemein beweisen. Da die nämliche Schwierigkeit bei allen Eliminationen vorkommt, so will ich nicht unterlassen, den Leser darauf aufmerksam zu machen, damit er durch diesen Umstand in vorkommenden Fällen nicht in Verlegenheit gerathe.

Man sieht, dass dadurch die obige Theorie der Divisoren zweiter Ordnung mangelhaft werden kann. Denn da die Gleichung, von welcher einer der Coefficienten abhängt, gleiche Wurzeln hat, so wird der andere Coefficient, wenn man sich der gleichen Wurzeln bedient, von einer Gleichung abhängen, deren Ordnungs-Zahl der Zahl der gleichen Wurzeln gleich ist, und welche folglich, wenn sie nicht von ungerader Ordnung ist, neue Combinationen erfordert, um versichert zu seyn, dass sie eine reelle Wurzel hat. Und will man die gleichen Wurzeln nicht anwenden, so erhält man zwar, wenn man sie durch die Divi-

Ueber die Form der

sion wegschafft, eine Gleichung von niedrigerm Grade, dessen Zahl aber nicht mehr eine Zahl von der Form $2^{m-1}\pi$ oder $2^{m-2}\varrho$ ist.

Nimmt man z. B. die obigen von Descartes gefundenen Ausdrücke für Gleichungen vierter Ordnung, aus welchen wir sogleich schlossen, dass die Gleichungen immer in zwei reelle Factoren der zweiten Ordnung zerlegbar sind, so ist leicht zu sehen, dass es dennoch einen Fall giebt, in welchem der Schluss nicht Statt findet: den Fall nämlich, wenn [*in* (407.)] $q = 0$ ist. Denn alsdann hat die auf y reducirte Gleichung (409.) zwei gleiche Wurzeln $y = 0$, und bedient man sich dieser Wurzeln, so erhält man für das Glied $\frac{q}{2y}$ des Ausdrucks der Factoren zweiter Ordnung (408.) den Ausdruck $\frac{0}{0}$.

Man könnte die andern Werthe von y nehmen. Aber dividirt man die Gleichung (409.) durch y^2, so erhält man

$$416.\quad y^4 + 2py^2 + p^2 - 4r = 0,$$

welche Gleichung aber, da sie vom vierten Grade und ihr letztes Glied nicht nothwendig negativ ist, wieder die anfängliche Schwierigkeit hat. Nur in diesem besondern Falle lässt sich die Realität der beiden Factoren aus dem Ausdruck selbst zeigen. Denn wenn $p^2 < 4r$, so ist das letzte Glied der Gleichung mit y (416.) negativ, und dieselbe hat alsdann zwei reelle Wurzeln. Wäre dagegen $p^2 > 4r$, so hätte die gegebene Gleichung (407.), weil $q = 0$ ist, und

imaginairen Wurzeln.

die Gleichung also in $x^4 + p^2 x^2 + 4r$ übergeht, die beiden reellen Factoren $x + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - r)}$.

166.

Diese Schwierigkeiten haben die Untersuchungen veranlasst, welche ich im Jahre 1772 der Berliner Academie mittheilte, und bei welchen ich insbesondere bemüht war, die von Euler angefangene Theorie weiter zu entwickeln.

Ich habe daselbst strenge gezeigt, dass, wenn man ein Polynom von der 2^mten Ordnung in zwei andere Polynome von der Ordnung 2^{m-1}, z. B. wenn $2^{m-1} = n$ ist, von der Form

$$417. \quad \begin{cases} x^n + Mx^{n-1} + Nx^{n-2} + Px^{n-3} \dots \\ x^n + M_{,}x^{n-1} + N_{,}x^{n-2} + P_{,}x^{n-3} \dots \end{cases}$$

zerlegen will, und man setzt

$$418. \quad u = a(M - M_{,}) + b(N - N_{,}) + c(P - P_{,}) \dots$$

wo $a, b, c \dots$ beliebige Grössen sind, dass sich dann die Coefficienten der beiden Polynome $M, N, P \dots$, $M_{,}, N_{,}, P_{,} \dots$ allgemein durch rationale Functionen von n ausdrücken lassen, und dass man für u eine Gleichung erhält, deren Ordnungs-Zahl ein ungerades Vielfache einer geraden Zahl ist, die nur gerade Potenzen von u enthält und deren letztes Glied nothwendig negativ ist. Durch die Willkürlichkeit der Grössen $a, b, c \dots$ kann man zugleich machen, dass das letzte Glied dieser Gleichung einmal Null ist, so dass die Gleichung weder zwei Wurzeln $u = 0$, noch

sonst gleiche Wurzeln hat. Man ist auf diese Weise versichert, dass man immer die reellen Werthe der Coefficienten erhält, und kann also die gegebene Gleichung vom 2^mten Grade vollständig in zwei andere vom 2^{m-1}ten Grade, diese wiederum in zwei vom 2^{m-2}ten Grade u. s. w. bis zu Gleichungen des zweiten Grades herab, zerlegen.

Für Gleichungen vom Grade $2^m k$, wo k eine ungerade Zahl ist, hatte Euler gefunden, dass, wenn man einen Divisor vom Grade 2^m nimmt, die Gleichungen, welche die Coefficienten darstellen, von ungerader Ordnung sind. Ich bemerkte, dass, wenn die Gleichung gleiche Wurzeln hat, die zweifachen, vierfachen etc. Wurzeln eliminirt werden können, weil die übrig bleibende Gleichung immer noch von ungerader Ordnung ist, die dreifachen, fünffachen Wurzeln etc. aber bei der Bestimmung der andern Coefficienten angewendet werden können, weil dieselben alsdann von Gleichungen des dritten, fünften etc. Grades abhängen, welche immer reelle Wurzeln haben.

167.

Hierdurch war die Möglichkeit der Zerlegung der Gleichungen in Divisoren vom ersten und zweiten Grade strenge bewiesen. Späterhin hat Laplace, in den Vorlesungen an der Normal-Schule, von dem Verfahren von Foncenex ausgehend, einen einfacheren Beweis dieses Satzes gegeben. Anstatt blos die Gleichung zu untersuchen, welche den Coefficien-

imaginairen Wurzeln.

ten des quadratischen Divisors $x^2 - ux + V = 0$ bestimmt, zieht er die Gleichung in Betracht, welche die Grösse $u + aV$ bestimmt, die ich durch $u_{,}$ bezeichnen will und in welcher a ein beliebiger Coefficient ist. Diese Gleichung ist, der Theorie der Combinationen zu Folge, von demselben Grade wie die Gleichung mit u. Ist also die gegebene Gleichung vom 2νten Grade, wo ν ungerade ist, so ist die Ordnungs-Zahl der Gleichung mit u eine gerade und hat folglich immer eine reelle Wurzel. Da man nun der Grösse a unendlich viele Werthe geben kann, so erhält man eine unendliche Menge Gleichungen, welche alle reelle Wurzeln haben. Unter diesen Wurzeln müssen nothwendig mehrere auf einen und denselben Divisor sich beziehen. Sind α und β zwei solcher Wurzeln, und a und b die beiden zugehörigen Werthe des Coefficienten a, so ist $u + aV = \alpha$, and $u + bV = \beta$, woraus man die Werthe von u und V findet, welche folglich reell sind.

Ist die gegebene Gleichung vom 4νten Grade, wo ν irgend eine ungerade Zahl ist, so ist die Gleichung mit u von der 2πten Ordnung, wo π ebenfalls eine ungerade Zahl ist. Diese Gleichung hat alsdann, dem Vorigen zu Folge, einen reellen quadratischen Divisor von der Form $u_{,}^2 - tu_{,} + T = 0$, welcher für u einen Werth von der Form $\alpha + A\sqrt{-1}$ giebt. Da man für a unendlich viele Werthe setzen kann, so erhält man eine unendliche Menge von Gleichungen mit $u_{,}$ welche jede eine Wurzel von der Form $\alpha + A\sqrt{-1}$ haben. Unter diesen Wurzeln

Ueber die Form der imagin. Wurzeln.

müssen nothwendig zwei seyn, welche sich auf den nämlichen Divisor beziehen. Bezeichnet man sie durch $\alpha + A\sqrt{-1}$ und $\beta + B\sqrt{-1}$, und die beiden zugehörigen Werthe von a durch a und b, so erhält man $u + aV = \alpha + A\sqrt{-1}$ und $u + bV = \beta + B\sqrt{-1}$. Also sind beide Grössen u und V von der Form $p + q\sqrt{-1}$; desgleichen ist auch das aus der Gleichung $x^2 - ux + V = 0$ folgende x von dieser Form. Mithin hat jede Gleichung vom 4νten Grade zwei Wurzeln von der Form $p \pm q\sqrt{-1}$, und folglich einen reellen Divisor zweiter Ordnung u. s. w.

Dieser Beweis lässt als solcher Nichts zu wünschen übrig. Wollte man aber wirklich eine gegebene Gleichung in ihre reelle Factoren zweiter Ordnung auflösen, so würde es beinahe unmöglich seyn, das angezeigte Verfahren zu befolgen. Gleichwohl ist die Auflösung nothwendig um [*z. B.*] die Stammgrösse oder die Integrale gebrochener rationaler Functionen mit einer veränderlichen Grösse zu finden, und man setzt sie in allen Lehrbüchern der Integral-Rechnung voraus. Dieses veranlasst mich, noch bei dem Gegenstande zu verweilen und demselben den folgenden Zusatz zu widmen.

Zehnter

Zehnter Zusatz.

Ueber die Zerlegung von Polynomen beliebiger Ordnung in reelle Factoren.

168.

Ich habe in diesem Zusatze die Absicht, zu zeigen, wie sich jedes Polynom von einer beliebigen Ordnung in reelle Polynome erster oder zweiter Ordnung zerlegen lässt.

Betrachtet man ein Polynom aus so viel einfachen Factoren zusammengesetzt, als der Exponent der höchsten Potenz der unbestimmten Grösse Einheiten enthält, so ist leicht zu sehen, dass das Polynom keine andere Divisoren als solche haben kann, die Producte jener Factoren sind; woraus folgt, dass, wenn die Ordnungs-Zahl des gegebenen Polynoms m ist, so viele verschiedene Divisoren von der nten Ordnung Statt finden als sich n Dinge aus m Dingen machen lassen, oder als, zu Folge der Theorie der Combinationen, die Zahl

419. $$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \ldots\ldots n} \; [=\mu]$$

Einheiten enthält.

Zerlegung von

Diese einzige Betrachtung setzt uns in Stand, die Coefficienten der dividirenden Polynome a priori zu finden, ohne, nach dem gewöhnlichen Verfahren, der weitläufigen und beschwerlichen Operationen zu bedürfen, welche auf der Division oder der Vergleichung des Products zweier unbestimmten Polynome mit den dividirenden Polynomen, oder auf der allmäligen Elimination der unbekannten Grösse beruhen.

169.

Es sey das Polynom der mten Ordnung

420. $x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} \ldots \pm h \; [= P]$

gegeben, welches wir aus m einfachen Factoren $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma \ldots$ zusammengesetzt annehmen.

Entwickelt man das Product dieser Factoren und vergleicht die Glieder des entwickelten Ausdrucks mit dem gegebenen Polynom, so erhält man, wie bekannt,

421. $$\begin{cases} a = \alpha + \beta + \gamma + \delta \ldots \\ b = \alpha\beta + \alpha\gamma \ldots + \beta\gamma \ldots + \alpha\delta \ldots \\ c = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta \ldots + \beta\gamma\delta \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h = \alpha\beta\gamma\delta \ldots \end{cases}$$

Bezeichnet man durch

422. $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - rx^{n-3} \ldots \pm u \; [= D]$

einen Divisor des gegebenen Polynoms, so kann dieser Divisor nur aus einer Zahl n nämlicher Factoren

zusammengesetzt seyn. Es ist also, wenn man n Grössen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ aus den obigen m Grössen nimmt,

$$423. \quad \begin{cases} p = \alpha + \beta + \gamma \ldots \\ q = \alpha\beta + \alpha\gamma \ldots + \beta\gamma \ldots \\ r = \alpha\beta\gamma \ldots \\ \cdots\cdots \\ u = \alpha\beta\gamma \ldots \end{cases}$$

Da in den gegebenen Coefficienten $a, b, c \ldots h$ die Grössen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ gleichförmig [*oder, wie man auch sagt, symmetrisch*] vorkommen, so dass die Grössen $a, b, c \ldots h$ die nämlichen bleiben, wie man auch die Grössen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ verwechseln mag, so folgt, dass jeder rationale Ausdruck, der diese Coefficienten enthält, die nämliche Eigenschaft hat. Da nun die Coefficienten $p, q, r \ldots u$ des Divisors ähnliche Functionen sind, blos mit dem Unterschiede, dass sie nur n Grössen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ enthalten, so ist klar, dass sie nicht durch rationale Functionen der Coefficienten $a, b, c \ldots$ ausgedrückt werden können: wohl aber kann man sie jeden von einer Gleichung abhängig machen, deren Coefficienten rationale Functionen von $a, b, c \ldots$ sind, wenn man diese Gleichung auf die Weise zusammensetzt, dass sie die verschiedenen Werthe von $p, q, r \ldots$, deren Zahl der obigen Zahl μ (419.) gleich ist, zu Wurzeln haben.

[*Grössen nämlich, die von allen m Grössen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ gleichförmig, das heisst, so abhängen, dass man $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ unter einander verwechseln*

Zerlegung von

kann, ohne dass sich die Form der abhängigen Grössen ändert, können nur einen Werth haben, weil die Grössen α, β, γ.... diesen Werth gleichförmig bestimmen. Grössen hingegen, die nur von n Grössen α, β, γ.... gleichförmig oder symmetrisch abhängen, haben zwar ebenfalls nur einen Werth, wenn man die n Grössen α, β, γ...., welche darin vorkommen, untereinander verwechselt, können aber verschiedene Werthe haben, wenn man die n Grössen α, β, γ.... mit den übrigen $m-n$ Grössen verwechselt. Die Zahl dieser verschiedenen Werthe ist μ (419.), und daher können solche Grössen nur von Gleichungen von der μten Ordnung abhängen, d. h. nur die Wurzeln solcher Gleichungen seyn.]

170.

Wir wollen zuerst den letzten Coefficienten u (423.) betrachten, welcher aus einem Producte der n Grössen α, β, γ.... besteht. Die verschiedenen Werthe desselben sind $\alpha\beta\gamma$...., $\beta\gamma\delta$...., $\alpha\gamma\delta$.... Macht man also ein Product von den einfachen Factoren

424. $u-\alpha\beta\gamma\ldots$, $u-\beta\gamma\delta\ldots$, $u-\alpha\gamma\delta\ldots$ etc.

so hat dieses Polynom die Eigenschaft, dass es, unabhängig von u, eine unveränderliche Function von α, β, γ.... ist. Entwickelt man dasselbe, so haben seine Coefficienten ebenfalls diese Eigenschaft.

Denn das entwickelte Polynom sey

Polynomen.

425. $u^{\mu} - Au^{\mu-1} + Bu^{\mu-2} + Cu^{\mu-3} \ldots \pm V,$

so ist

$$426. \left\{\begin{array}{l} A = \alpha\beta\gamma\ldots + \beta\gamma\delta\ldots + \alpha\gamma\delta\ldots \\ B = \alpha\beta\gamma\ldots \times \beta\gamma\delta\ldots \\ \quad + \alpha\beta\delta\ldots \times \alpha\gamma\delta\ldots \\ \quad + \beta\gamma\delta\ldots \times \alpha\gamma\delta\ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V = \alpha\beta\gamma\ldots\; \beta\gamma\delta\ldots\; \alpha\gamma\delta\ldots \end{array}\right.$$

welche Coefficienten, wie man sieht, wirklich unveränderliche Functionen von α, β, $\gamma \ldots$ sind.

Dergleichen unveränderliche Functionen können nun, wie bekannt, immer durch rationale Functionen der Coefficienten a, b, $c \ldots h$ ausgedrückt werden.

171.

Zunächst lässt sich, wie wir im sechsten Zusatze (§. 119.) sahen, die Summe der Potenzen der Grössen α, β, $\gamma \ldots$ beliebiger Ordnung durch dergleichen Functionen ausdrücken. Multiplicirt man hierauf die Summe der Potenzen α^{λ}, β^{λ}, $\gamma^{\lambda} \ldots = S\alpha^{\lambda}$ durch die Summe der Potenzen α^{μ}, β^{μ}, $\gamma^{\mu} \ldots = S\alpha^{\mu}$, so ist das Product

427. $S\alpha^{\lambda} . S\alpha^{\mu} = S\alpha^{\lambda+\mu} + S\alpha^{\lambda}\beta^{\mu}$

[*z. B. wenn* $S\alpha^{\lambda} = \alpha^{\lambda} + \beta^{\lambda} + \gamma^{\lambda}$, *und also* $S\alpha^{\mu} = \alpha^{\mu} + \beta^{\mu} + \gamma^{\mu}$, *so ist*

$$\begin{aligned} S\alpha^{\lambda} . S\alpha^{\mu} = {} & \alpha^{\lambda}\alpha^{\mu} + \alpha^{\lambda}\beta^{\mu} + \alpha^{\lambda}\gamma^{\mu} \\ & + \beta^{\lambda}\alpha^{\mu} + \beta^{\lambda}\beta^{\mu} + \beta^{\lambda}\gamma^{\mu} \\ & + \gamma^{\lambda}\alpha^{\mu} + \gamma^{\lambda}\beta^{\mu} + \gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}, \end{aligned}$$

Zerlegung von

oder

$$S\alpha^\lambda . S\alpha^\mu = \alpha^{\lambda+\mu} + \beta^{\lambda+\mu} + \gamma^{\lambda+\mu}$$
$$+ \alpha^\lambda\beta^\mu + \alpha^\lambda\gamma^\mu + \beta^\lambda\alpha^\mu + \beta^\lambda\gamma^\mu + \gamma^\lambda\alpha^\mu + \gamma^\lambda\beta^\mu,$$

also

$$S\alpha^\lambda . S\alpha^\mu = S\alpha^{\lambda+\mu} + S\alpha^\lambda\beta^\mu].$$

Man findet also die Summe der Glieder von der Form $\alpha^\lambda \beta^\mu$ durch die Summe der Potenzen.

Auf dieselbe Weise findet man

428. $S\alpha^\lambda\beta^\mu . S\gamma^\nu = S\alpha^{\lambda+\nu}\beta^\mu + S\alpha^\lambda\beta^{\mu+\nu} + S\alpha^\lambda\beta^\mu\gamma^\nu.$

Auch diese Summe also lässt sich durch Functionen der Potenzen-Summen finden u. s. w.

Nun ist leicht zu sehen, dass keine rationale und unveränderliche Function der Grössen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ anders als aus einer oder mehreren der obigen ähnlichen Summen zusammengesetzt seyn kann. Also lässt sich jede solche Function immer durch die Coefficienten $a, b, c \ldots$ ausdrücken.

Dieser Satz ist einer der folgereichsten in der Theorie der Gleichungen. Newton, und lange vorher Albert Girard, hatten gezeigt, wie sich die Summen der Potenzen der Wurzeln einer Gleichung durch ihren Coefficienten ausdrücken lassen. Man sehe in dem Werke von Albert Girard unter dem Titel: „Invention nouvelle en algèbre," welches im Jahre 1629 zu Amsterdam gedruckt ist, das zweite Beispiel zum zweiten Lehrsatze. Euler in den Memoiren der Berliner Academie vom Jahre 1748 und Cramer am Schlusse seiner Einleitung in die Ana-

lysis der Curven, haben gezeigt, dass sich die Summe der Producte der Wurzeln einer gegebenen Gleichung, zu zweien, zu dreien etc. genommen, und zu verschiedenen Potenzen erhoben, durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausdrücken lassen, und Waring hat allgemeine Ausdrücke für dergleichen Functionen der Wurzeln gegeben. In einzelnen Fällen aber ist es vielleicht einfacher, die obige Methode anzuwenden.

172.

Die Coefficienten des Polynoms (424 und 425.) kann man folgende nun auf Weise berechnen.

Man fange mit der Summe der Potenzen, also mit dem Ausdrucke

429. $$\left\{\begin{array}{l} S\alpha = a \\ S\alpha^2 = aS\alpha - 2b \\ S\alpha^3 = aS\alpha^2 - bS\alpha + 3c \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (420.)$$

an. Hierauf suche man die nten Glieder der Reihen

430. $$\left\{\begin{array}{l} S\alpha = a,\ S\alpha\beta = b,\ S\alpha\beta\gamma = c \ldots\ldots \\ S\alpha^2,\ S\alpha^2\beta^2 = \frac{1}{2}(S\alpha^2 . S\alpha^2 - S\alpha^4) \\ \quad S\alpha^2\beta^2\gamma^2 = \frac{1}{3}(S\alpha^2\beta^2 . S\alpha^2 - S\alpha^2 . S\alpha^4 + S\alpha^6) \ldots\ldots \\ S\alpha^3,\ S\alpha^3\beta^3 = \frac{1}{2}(S\alpha^3 . S\alpha^3 - S\alpha^6) \\ \quad S\alpha^3\beta^3\gamma^3 = \frac{1}{3}(S\alpha^3\beta^3 . S\alpha^3 - S\alpha^3 . S\alpha^6 + S\alpha^9) \ldots\ldots \\ etc. \end{array}\right.$$

Diese nten Glieder sind die Werthe der Summen $S\alpha\beta\gamma \ldots\ldots$, $S\alpha^2\beta^2\gamma^2 \ldots\ldots$, $S\alpha^3\beta^3\gamma^3 \ldots\ldots$ *etc.*

Zerlegung von

[*Man findet diese Rechnungen in dem Buche von* **Meyer Hirsch**, *welches den Titel führt: „Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Gleichungen" Berlin* 1809.] Alsdann ist

431. $$\begin{cases} A = \mathrm{S}\,\alpha\beta\gamma\,.... \\ B = \tfrac{1}{2}(A\,\mathrm{S}\,\alpha\beta\gamma\,.... - \mathrm{S}\,\alpha^2\beta^2\gamma^2\,....) \\ C = \tfrac{1}{3}(B\,\mathrm{S}\,\alpha\beta\gamma\,.... - A\,\mathrm{S}\alpha^2\beta^2\gamma^2\,.... + \mathrm{S}\alpha^3\beta^3\gamma^3\,....) \\ etc. \end{cases}$$

Uebrigens ist leicht zu sehen, dass man den ersten Coefficienten A und den letzten V, ohne alle Rechnung findet. Der erste Coefficient A ist offenbar dem Coefficienten zu x^{m-n} in dem gegebenen Polynom $x^m - a\,x^{m-1}\,....$ gleich [*denn er ist, eben wie der Coefficient zu* x^{m-n} *in* $x^m - ax^{m-1}\,....$ *gleich* $\alpha\beta\gamma\,.... + \beta\gamma\delta\,.... + \alpha\gamma\delta\,....$]. Der Coefficient V ist von der Form $\alpha^\nu\beta^\nu\gamma^\nu\delta^\nu\,.... = h^\nu$. Um den Coefficienten ν zu finden, darf man nur erwägen, dass dieser Coefficient das Product von μ Grössen ist, deren jede das Product von n Grössen aus den m Grössen $\alpha, \beta, \gamma\,....$ ist, so dass der Coefficient die Abmessung $n\mu$ hat. Es muss also $m\nu = n\mu$, und folglich $\nu = \frac{\mu n}{m}$ seyn. Nun ist

432. $$\begin{cases} \mu = \dfrac{m(m-1)(m-2)....(m-n+1)}{2.3\,....\,n} \text{ (419.), also ist} \\ \nu = \dfrac{(m-1)(m-2)\,....\,(m+n-1)}{2.3\,....\,(n-1)} \\ \text{und der Werth von } V \text{ ist } h^\nu. \end{cases}$$

Polynomen.

Hat man auf diese Weise den letzten Coefficienten V des Polynoms mit u (424.) gefunden, so ist es hinreichend, direct die erste Hälfte der Coefficienten A, B, C.... des Polynoms zu berechnen; denn wenn die dem Gliede V vorhergehenden Coefficienten T, S, R.... sind, so ist leicht zu sehen, dass

$$433. \quad \frac{T}{V} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma\ldots.} + \frac{1}{\beta\gamma\delta\ldots.} + \frac{1}{\alpha\gamma\delta\ldots.}\ldots.$$

Bezeichnet man nun durch (n) den Coefficienten zu x^n in dem gegebenen Polynom (420.), so ist auch

$$434. \quad \frac{(n)}{h} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma\ldots.} + \frac{1}{\beta\gamma\delta\ldots.} + \frac{1}{\alpha\gamma\delta\ldots.}\ldots.,$$

und folglich ist $\frac{T}{V} = \frac{(n)}{h}$, und mithin

$$435. \quad T = \frac{(n)V}{h}.$$

Bezicht man hierauf die Coefficienten des gegebenen Polynoms (420.), welche dem letzten Coefficienten h vorhergehen, so darf man nur, wenn der Ausdruck von B durch a, b, c.... gefunden ist, a mit $\frac{g}{h}$, b mit $\frac{f}{h}$, c mit $\frac{e}{h}$.... u. s. w. verwechseln, um den Werth von $\frac{S}{V}$ zu finden. Macht man die nämlichen Veränderungen mit dem Ausdrucke von C, so findet man den Werth von $\frac{R}{V}$ u. s. w.

Hat man auf diese Weise das Polynom mit u (424.) [*den letzten Coefficienten des dividirenden*

Zerlegung von

Polynoms (422.)] aufgestellt, so erhält man, wenn man es gleich Null setzt, eine Gleichung, deren Wurzeln $\alpha\beta\gamma\ldots$, $\beta\gamma\delta\ldots$, $\alpha\gamma\delta\ldots$ sind, aus welcher sich also der Werth von u finden lässt. Es bleibt also nur noch übrig, die Werthe der übrigen Coefficienten $p, q, r\ldots$ des dividirenden Polynoms (422.) zu finden.

173.

Das einfachste Verfahren, diese Coefficienten zu finden, ist, dass man das Polynom $x^m - ax^{m-1}\ldots$ durch das Polynom $x^n - px^{n-1}\ldots \pm u$ wirklich dividirt, bis man zu einem Rest kommt, in welchem die höchste Potenz von x niedriger ist als x^n. Setzt man die Glieder dieses Restes einzeln gleich Null, damit derselbe von der unbekannten Grösse x unabhängig sey, so erhält man n Gleichungen zwischen den n Coefficienten $p, q \ldots n$, aus welchen sich, allgemein genommen, für die Werthe von $p, q\ldots$ rationale Ausdrücke durch u finden lassen. Man würde auf diese Weise die Gleichung in u selbst finden, wenn man die Werthe in die übrig bleibenden Gleichungen substituirte. Da man aber auf diesem Wege nicht sieht, von welchem Grade die End-Gleichung in u ist, und man selbst auf eine Gleichung mit u kommen könnte, deren Grad höher ist als nöthig, worin in der That der gewöhnliche Uebelstand bei Eliminationen besteht; so glauben wir, dass es gut sey zu zeigen, wie sich gesuchte Gleichungen

Polynomen.

a priori finden lassen, und wie man ihre Ordnungs-Zahl finden könne.

Eben deshalb scheint es auch gut, eine directe Methode der Entwickelung der Coefficienten $p, q \ldots$ in u zu haben und versichert zu seyn, dass die Ausdrücke derselben immer rational sind, ausgenommen den besondern Fall, wenn sie von Gleichungen des zweiten und dritten Grades abhängen, wie wir in dem vorigen Zusatze sahen. Wir wollen also untersuchen, wie sich die Werthe der Coefficienten $p, q \ldots$ in u finden lassen, wenn man die Gleichung mit u voraussetzt.

174.

Man erwäge, dass man, weil die Grösse x unbestimmt ist [*nämlich in dem gegebenen Polynom* (420.), *welches noch nicht gleich Null gesetzt worden*], sowohl in das gegebene Polynom $P = x^m - ax^{m-1} \ldots$, als in den vorausgesetzten Divisor desselben, $D = x^n - px^{n-1} \ldots$, $x - k$ statt x setzen kann. Geschieht dieses, so geht P in eine Grösse von der Form

436. $x^m - a_{,}x^{m-1} + b_{,}x^{m-2} - \ldots \pm h_{,}$

über, wo [*wie leicht zu sehen*]

437. $$\begin{cases} a_{,} = a + mk \\ b_{,} = b + (m-1)ak + \dfrac{m(m-1)}{2}k^2 \\ c_{,} = c + (m-2)bk + \dfrac{m(m-1)}{2}ak^2 + \dfrac{m(m-1)(m-2)}{2.3}k^3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_{,} = h + gk + fk^2 + ek^3 \ldots \end{cases}$$

ist.

Zerlegung von

Eben so geht D in eine Grösse von der Form

438. $x^n - p_{,} x^{n-1} + q_{,} x^{n-2} - \ldots \pm u_{,}$

über, wo

439. $$\begin{cases} p_{,} = p + nk \\ q_{,} = q + (n-1)pk + \frac{n(n-1)}{2} k^2 \\ r_{,} = r + (n-2)qk + \frac{(n-1)(n-2)}{2} pk^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} k^3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{,} = u + tk + sk^2 + rk^3 \ldots \end{cases}$$

ist.

Daraus folgt, dass, wenn man in die Gleichung

$$u^\mu - A u^{\mu-1} + B u^{\mu-2} \ldots \pm V = 0 \quad (425.)$$

[*von welcher der letzte Coefficient u des Divisors* $D = x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} \ldots \pm u$ *abhängt und*] in welcher die Coefficienten A, B, $C \ldots$ Functionen von a, b, $c \ldots h$ sind, der Reihe nach $a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,} \ldots h_{,}$ statt a, b, $c \ldots h$ setzt, der Werth von u nothwendig in $u_{,}$ übergeht, was auch k seyn mag. [*Denn Alles zusammen entspricht jetzt blos einem andern Werthe* $x + k$ *der unbestimmten und von den übrigen Grössen unabhängigen Grösse* x.] Entwickelt man also die Glieder nach Potenzen von k, so muss jedesmal die Summe der Glieder, welche einerlei Potenzen von k enthalten, Null seyn, welches mehrere Gleichungen giebt, aus deren jeder man einen der Coefficienten t, s, $r \ldots$ durch die vorhergehenden bestimmen kann.

Polynomen.

175.

Man kann auch diese Coefficienten selbst unmittelbar durch die Ableitungs-Operation finden [*welches auch wohl kürzer ist*]. Setzt man nämlich $\frac{k}{m}$ statt k, so folgt aus den Ausdrücken (437.), dass, wenn a in $a+k$ übergeht,

$$440. \quad \begin{cases} b + \frac{m-1}{m} ak + \frac{m(m-1)}{2m^2} k^2 \ldots\ldots \text{ aus } b \\ c + \frac{m-2}{m} bk + \frac{(m-1)(m-2)}{2m^2} ak^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3.m^3} \\ \qquad \text{aus } c \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u + \frac{t}{m} k + \frac{s}{m^2} k^2 + \frac{r}{m^3} k^3 \ldots\ldots \text{ aus } u \end{cases}$$

wird.

Betrachtet man also, welches angeht, die Coefficienten $b, c \ldots\ldots h$ und u als Functionen von a, und erinnert sich, dass, wenn man $a+k$ statt a setzt, die Function u von a in

$$441. \quad u + k\frac{du}{da} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2u}{da^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3u}{da^3} \ldots\ldots$$

übergeht; so ist [*wenn man die Ableitungen von den Ausdrücken* (440.) *nimmt*]

$$\begin{cases} \frac{db}{da} = \frac{m-1}{m} a, \; \frac{d^2b}{da^2} = \frac{m(m-1)}{m^2}, \; \frac{d^3b}{da^3} = 0 \\ \frac{dc}{da} = \frac{m-2}{m} b, \; \frac{d^2c}{da^2} = \frac{(m-1)(m-2)}{m^2} a, \\ \qquad \frac{d^3c}{da^3} = \frac{m(m-1)(m-2)}{m^3}, \; \frac{d^4c}{da^4} = 0 \end{cases}$$

Zerlegung von

442. $$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial d}{da} = \frac{m-3}{m} c, \quad \frac{\partial^2 d}{da^2} = \frac{(m-2)(m-3)}{m^2} b \\ \frac{\partial^3 d}{da^3} = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{m^3} a \\ \frac{\partial^4 d}{da^4} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{m^4}, \quad \frac{\partial^5 d}{da^5} = 0 \\ \text{u. s. w.} \\ \frac{du}{da} = \frac{t}{m}, \quad \frac{d^2 u}{da^2} = \frac{2s}{m^2}, \quad \frac{d^3 u}{da^3} = \frac{2.3r}{m^3} \ldots\ldots \end{array}\right.$$

Man darf nunmehr nur noch der Reihe nach die Ableitungen der Gleichung in u (425.) nehmen und darin das Obige substituiren.

176.

Man setze [*die Grösse mit u* (425.)]

443. $u^{\mu} - Au^{\mu-1} + Bu^{\mu-2} - Cu^{\mu-3} \ldots\ldots \pm V = Z,$

so dass

444. $Z = 0$

die Gleichung (425.) mit u ist, welche den Werth von u bestimmt; so kann man, wenn man die Grösse Z als eine Function von a betrachtet, die Ableitungen davon nach a nehmen. [*Der Text erklärt in der hier folgenden Stelle seine Zeichen, welche die Theile der Ableitungen nach* $\frac{da}{da}, \frac{db}{da}, \frac{dc}{da}$ *etc. von den übrigen unterscheiden. Dieselben werden nämlich durch* $\left(\frac{Z'}{a'}\right), \left(\frac{Z'}{b'}\right), \left(\frac{Z'}{c'}\right) \ldots\ldots \left(\frac{Z''}{a'^2}\right)\left(\frac{Z''}{a'b'}\right) \ldots\ldots$ *bezeichnet. Da überall in dieser deutschen Ausgabe, aus den in der Vorrede*

Polynomen.

angegebenen Gründen, die alten Leibnitzschen Zeichen gebraucht werden sollen, so finden diese neuen Zeichen nicht Statt, und was davon Näheres gesagt ist, kann wegbleiben. Der Schluss der Bemerkungen wegen der neuen Zeichen aber darf nicht übergangen werden, denn Alles, was die Mangelhaftigkeit der alten Zeichen ins Licht setzt, kann nicht oft genug wiederholt werden. Lagrange sagt:] Nimmt man diese neuen Zeichen an, so behält der Algorithmus der Ableitungen alle die Vorzüge der Differential-Rechnung, und hat noch den neuen Vortheil, die Formeln von der Menge von *d* zu befreien, welche sie weitläufig machen, gewissermaassen entstellen und beständig die falsche Vorstellung vom Unendlich Kleinen herbeirufen.

177.

Man erhält, wenn man alle die Grössen *a*, *b*, *c* *h* und *u* als Functionen irgend einer unabhängig veränderlichen Grösse [*z. B.* λ] betrachtet,

445. $$\frac{dZ}{d\lambda} = \frac{dZ}{da}\cdot\frac{da}{d\lambda} + \frac{dZ}{db}\cdot\frac{db}{d\lambda} + \frac{dZ}{dc}\cdot\frac{dc}{d\lambda} \cdots + \frac{dZ}{du}\cdot\frac{du}{d\lambda},$$

und, wenn man von neuem die Ableitungen [*nach* λ] nimmt,

446. $$\frac{d^2Z}{d\lambda^2} = \frac{dZ}{da}\frac{d^2a}{d\lambda^2} + \frac{dZ}{db}\frac{d^2b}{d\lambda^2} + \frac{dZ}{dc}\frac{d^2c}{d\lambda^2} \cdots + \frac{dZ}{du}\frac{d^2u}{d\lambda^2},$$
$$+ \frac{d^2Z}{da^2}\left(\frac{da}{d\lambda}\right)^2 + 2\frac{d^2Z}{da\,db}\cdot\frac{da}{d\lambda}\cdot\frac{db}{d\lambda} \cdots$$
$$+ \frac{d^2Z}{db^2}\left(\frac{db}{d\lambda}\right)^2 \cdots$$

Zerlegung von

$$+2\,\frac{d^2Z}{da\,du}\cdot\frac{da}{d\lambda}\cdot\frac{du}{d\lambda}+2\,\frac{d^2Z}{db\,du}\cdot\frac{db}{d\lambda}\cdot\frac{du}{d\lambda}\ldots\ldots$$

$$+\frac{d^2Z}{du^2}\cdot\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2$$

u. s. w.

Setzt man nun [*die* **willkürliche** *Grösse* λ, $= a$, *also*]

447. $$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{da}{d\lambda}=1,\ \dfrac{d^2a}{d\lambda^2}=0\ \ldots\ldots \\ \text{und, den Ausdrücken (442.) zu Folge,} \\ \dfrac{db}{d\lambda}=\dfrac{m-1}{m}a,\ \dfrac{d^2b}{d\lambda^2}=\dfrac{m(m-1)}{m^2},\ \dfrac{d^3b}{d\lambda^3}=0 \\ \dfrac{dc}{d\lambda}=\dfrac{m-2}{m}b\ \text{etc.}\end{array}\right.$$

so sind die Gleichungen $\frac{dZ}{d\lambda}=0$, $\frac{d^2Z}{d\lambda^2}=0$ [*oder jetzt* $\frac{dZ}{da}=0$, $\frac{d^2Z}{da^2}=0$ *etc.*], welche alsdann Statt finden, folgende

448. $$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{dZ}{da}+\dfrac{dZ}{db}\dfrac{m-1}{m}a+\dfrac{dZ}{dc}\dfrac{m-2}{m}b\ldots\ldots+\dfrac{dZ}{du}\dfrac{t}{m}=0 \\ \dfrac{dZ}{db}\dfrac{m(m-1)}{m^2}+\dfrac{dZ}{dc}\dfrac{(m-1)(m-2)}{m^2}a\ldots\ldots+\dfrac{dZ}{du}\dfrac{2s}{m^2} \\ +\dfrac{d^2Z}{da^2}+2\dfrac{d^2Z}{da\,db}\dfrac{m-1}{m}a+\dfrac{d^2Z}{db^2}\left(\dfrac{m-1}{m}a\right)^2\ldots\ldots \\ +2\left(\dfrac{d^2Z}{da\,du}\dfrac{1}{m}+\dfrac{d^2Z}{db\,du}\dfrac{m-1}{m^2}a+\dfrac{d^2Z}{dc\,du}\dfrac{m-2}{m^2}b\ldots\right)t \\ +\dfrac{d^2Z}{du^2}\dfrac{t^2}{m^2}\ldots\ldots=0\end{array}\right.$$

u. s. w., in welchen Gleichungen die theilweisen Ableitun-

Polynomen.

tungen $\frac{dZ}{da}$, $\frac{dZ}{db}$ $\frac{d^2Z}{da^2}$, $\frac{d^2Z}{da\,db}$ *etc.* bekannte Functionen von a, b, c.... u sind.

Die erste Gleichung giebt also den Werth von t, die zweite giebt den Werth von s u. s. w., und zwar in rationalen Functionen von a, b, c.... u, so lange nicht etwa die theilweise Ableitung $\frac{dZ}{du}$ gleich Null ist, in welchem Falle die erste Gleichung kein t, die zweite kein s mehr enthält u. s. w. In diesem Fall also muss man den Werth von t aus der zweiten Gleichung (448.) nehmen, in welcher t auf den zweiten Grad steigt. Die folgenden Gleichungen geben alsdann die Werthe von s, r.... in rationalen Functionen. Wäre die Ableitung $\frac{d^2Z}{du^2}$ auch Null, so wäre die Gleichung für t nicht mehr vom ersten Grade; und wäre die Summe der Functionen, mit welchen t multiplicirt ist, zugleich Null, so verschwände die Grösse t aus der zweiten Gleichung und könnte nur durch die dritte Gleichung bestimmt werden, wo sie auf den dritten Grad stiege u. s. w.

Nun ist die Grösse

449. $\frac{dZ}{du}, = \mu u^{\mu-1} - (\mu-1)Au^{\mu-2} + (\mu-2)Bu^{\mu-3}$....

(443.) und die Gleichung $\frac{dZ}{du} = 0$ drückt, wie man sieht, die Bedingungen der Gleichheit der Wurzeln der Gleichung $Z = 0$ aus. Daraus folgt, dass, wenn diese Gleichung gleiche Wurzeln hat, und man setzt für u eine dieser gleichen Wurzeln, so dass die

Zerlegung von

Function $\frac{dZ}{du}$ mit Z zugleich Null ist, dass dann der Coefficient t von einer particulairen Gleichung zweiter Ordnung abhängt, und dass folglich auch alle übrige Coefficienten des Divisors D zugleich von der Auflösung zweier Gleichungen mit u und t abhängen. Wir zeigten in (§. 163.) den metaphysischen Grund davon aus der Gleichheit der Wurzeln. Der gegenwärtige Beweis ist strenge analytisch.

178.

Eine wesentliche Folgerung aus den obigen Ausdrücken ist, dass alle die Coefficienten t, s, r.... so lange die Grösse $\frac{dZ}{du}$ nicht Null ist, durch rationale Functionen von u gefunden werden, und dass solches also immer der Fall ist, wenn die Gleichung mit u keine gleiche Wurzeln hat, oder wenigstens, wenn man für u nur die ungleichen Wurzeln nimmt.

Nun ist zu bemerken, dass man immer machen kann, dass u keine gleichen Wurzeln hat, in so fern sich nur in dem gegebenen Polynom nicht etwa selbst gleiche Factoren befinden. Jedoch macht der letzte Fall keine Ausnahme, da sich die gleichen Factoren vom Anfange an eliminiren lassen. Man kann also immer annehmen, dass alle Factoren der Polynome ungleich sind.

Dieses vorausgesetzt, substituire man $x - \lambda$ statt x, so geht

Polynomen.

$$450.\begin{cases} a \text{ in } a + m\lambda \\ b \text{ in } b + (m-1)a\lambda + \frac{m(m-1)}{2}\lambda^2 \\ etc. \end{cases}$$

über [*wie in* (§. 174.) *als man* $x-k$ *statt* x *setzte*]. Die Factoren des neuen Polynoms sind also

$$x-\alpha-\lambda,\quad x-\beta-\lambda,\quad x-\gamma-\lambda \quad etc.$$

das heisst, die Grössen α, β, γ *etc.* sind in $\alpha+\lambda$, $\beta+\lambda$, $\gamma+\lambda$.... übergegangen.

Die Wurzeln der Gleichung mit u [$Z=0$ (443.)] sind also alle mögliche Producte von n Grössen aus den m Grössen $\alpha+\lambda$, $\beta+\lambda$, $\gamma+\lambda$...., und es ist klar, dass zwei von diesen Wurzeln nicht anders gleich seyn können, als wenn es zwei aus den verschiedenen Grössen entstehende gleiche Producte von zwei oder mehreren Abmessungen giebt. Dieses aber kann man durch die Grösse λ vermeiden, denn man kann diese Grösse offenbar so annehmen, dass die gleichen Producte nicht existiren. Denn z. B. für die beiden Producte $(\alpha+\lambda)(\beta+\lambda)$, $(\gamma+\lambda)(\delta+\lambda)$, welche gleich $\lambda^2 + (\alpha+\beta)\lambda+\alpha\beta$ und $\lambda^2+(\gamma+\delta)\lambda+\gamma\delta$ sind, giebt es nur einen Werth von λ, für welchen dieselben gleich sind. Also ist die Zahl der Werthe, für welche sie ungleich sind, unendlich gross, in so fern nicht etwa $\alpha+\beta=\gamma+\delta$ und $\alpha\beta=\gamma\delta$ ist, was aber nicht seyn soll, da α und β, γ und δ nicht gleich seyn sollen.

Eben so würde es sich bei einer grössern Zahl von Factoren verhalten, woraus folgt, dass man das ursprüngliche Polynom durch Zusatz einer unbe-

Zerlegung von

stimmten Grösse λ zu der Grösse x immer so verwandeln kann, dass die entstehende Gleichung mit u keine gleiche Wurzeln hat.

179.

Dieses ist nicht allein das Verfahren, sondern es sind die Ausdrücke selbst, durch welche sich immer ein Divisor nter Ordnung eines beliebigen Polynoms von der mten Ordnung finden lässt. Wie bewiesen, hängt dieser Divisor immer nur von der Wurzel einer einzigen Gleichung von der Ordnung

$$\mu = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{2.3\ldots n} \quad (419.)$$

ab; [*nämlich der Gleichung* (443.), *welche das letzte Glied u des vorausgesetzten Divisors* (422.) *als Wurzel enthält. Denn wenn das letzte Glied u des Divisors gefunden ist, so lassen sich nach* (*§.* 177.) *die übrigen Glieder des Divisors t, s, r ... p ohne weitere Auflösung von Gleichungen finden.*]

Es ist daher hinreichend, wenn diese Gleichung [*mit u*] nur eine einzige reelle Wurzel hat. Da man aber im Allgemeinen nur von Gleichungen ungerader Ordnungen oder von solchen gerader Ordnungen, deren letztes Glied negativ ist, versichert ist, dass sie eine reelle Wurzel haben, so muss man noch untersuchen, für welche Werthe von n diese Bedingungen Statt finden.

Welches auch die Zahl m seyn mag, so kann man immer setzen

Polynomen.

$$451.\quad m = 2^\varrho \tau,$$

wo τ ungerade ist [$2^\varrho \tau$ *drückt, wenn man unter die verschiedenen Werthe von* ϱ *auch den Werth Null zählt, jede mögliche gerade oder ungerade Zahl aus*]. Wir wollen

$$452.\quad n = 2^\varrho$$

setzen, so ist [*nach* (419.)]

$$\mu = \frac{2^\varrho \tau (2^\varrho \tau - 1)(2^\varrho \tau - 2) \ldots (2^\varrho \tau - 2^\varrho + 1)}{2 \cdot 3 \ldots 2^\varrho},$$

oder, was das Nämliche ist,

$$\mu = \frac{2^\varrho \tau (2^\varrho \tau - 1)(2^\varrho \tau - 2) \ldots (2^\varrho \tau - 2^\varrho + 1)}{2^\varrho (2^\varrho - 1)(2^\varrho - 2) \ldots (2^\varrho - 2^\varrho + 1)}.$$

Dividirt man dieses oben und unten durch $2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2^\varrho$, so erhält man

$$453.\quad \mu = \frac{\tau(2^\varrho\tau-1)(2^{\varrho-1}\tau-1)(2^\varrho\tau-3)(2^{\varrho-1}\tau-4)(2^\varrho\tau-5)\ldots(2^\varrho\tau-2^\varrho+1)}{(2^\varrho-1)(2^{\varrho-1}-1)(2^\varrho-3)(2^\varrho-4)(2^\varrho-5)\ldots(2^\varrho-2^\varrho+1)}.$$

Da in diesem Ausdrucke Zähler und Nenner nur ungerade Factoren haben, und die Zahl μ ihrer Natur nach nothwendig eine ganze Zahl ist, so folgt, dass dieselbe nothwendig ungerade seyn muss, [*weil Ungerades mit Ungeradem multiplicirt und Ungerades durch Ungerades dividirt, allemal Ungerades giebt.*]

Hieraus folgt, dass jedes Polynom vom Grade $2^\varrho \tau$ immer einen reellen Divisor vom Grade 2^ϱ hat,

[*weil dann der Grad* μ *der Gleichung mit* u (443.) *eine ungerade Zahl ist und eine solche Gleichung allemal eine reelle Wurzel hat, so dass also* u *nothwendig wenigstens* e i n e n *reellen Werth haben muss, und die übrigen Coefficienten des vorausgesetzten Divisors* D, *der jetzt vom* 2^ϱ*ten Grade ist, weil sie von* u *abhängen, ebenfalls reelle Grössen sind, so dass also der ganze Divisor reell ist.*] Das Polynom, welches den Quotienten ausmacht, ist also ebenfalls reell. Es ist vom Grade $2^\varrho\tau - 2^\varrho = 2^\varrho(\tau - 1)$. Da in diesem Ausdrucke τ eine ungerade Zahl ist, so ist $\tau - 1$ eine gerade Zahl, welche man durch $2^\sigma k$ ausdrücken kann, wo k ungerade ist. Der Quotient ist also vom Grade $2^{\varrho+\sigma}k$ und hat folglich wieder einen reellen Divisor vom Grade $2^{\varrho+\sigma}$ u. s. w. Da auf diese Weise jede ganze Zahl in eine gewisse Zahl steigender Potenzen von 2, z. B. 2^ϱ, $2^{\varrho+\sigma}$.... zerlegt werden kann, so folgt, dass jedes Polynom von irgend einem Grade unmittelbar in eine gleiche Zahl von Polynomen zerlegt werden kann, deren Ordnungs-Zahlen jene Potenzen von 2 sind.

180.

Es sind also nur noch die Polynomen zu untersuchen, deren Ordnungs-Zahl eine Potenz von 2 ist.

Wir wollen in den allgemeinen Ausdruck von μ (419.)

454. $m = 2^\varrho$ und $n = \frac{1}{2}m = 2^{\varrho-1}$

Polynomen.

setzen, so ist

$$\mu = \frac{2^\varrho(2^\varrho-1)(2^\varrho-2)\ldots.(2^\varrho-2^{\varrho-1}+1)}{1.2.3\ldots.2^{\varrho-1}},$$

oder

$$\mu = \frac{2^\varrho(2^\varrho-1)(2^\varrho-2)\ldots.(2^\varrho-2^{\varrho-1}+1)}{2^{\varrho-1}(2^{\varrho-1}-1)(2^{\varrho-1}-2)\ldots.(2^{\varrho-1}-2^{\varrho-1}+1)}.$$

Dividirt man oben und unten durch $2.4.6\ldots.2^{\varrho-1}$, so erhält man

455. $\mu =$

$$\frac{2(2^\varrho-1)(2^{\varrho-1}-1)(2^\varrho-3)(2^{\varrho-1}-1)\ldots.(2^\varrho-2^{\varrho-1}+1)}{(2^{\varrho-1}-1)(2^{\varrho-2}-1)(2^{\varrho-1}-3)(2^{\varrho-2}-1)\ldots.(2^{\varrho-1}-2^{\varrho-1}+1)}.$$

Da alle Factoren des Zählers, mit Ausnahme des ersten Factors 2, so wie alle Factoren des Nenners, ungerade sind, so ist die Zahl μ, die ihrer Natur nach eine ganze Zahl seyn muss, nothwendig von der Form 2ω, wenn ω eine ungerade Zahl bedeutet.

Da in dem gegenwärtigen Falle die Ordnungs-Zahl n des Divisors D halb so gross ist als diejenige des gegebenen Polynoms [*denn es wurde* $n = \frac{1}{2}m$ *vorausgesetzt*], so sind die Wurzeln der Gleichung mit u alle die Producte, welche sich aus der Hälfte der Grössen α, β, $\gamma\ldots.$, deren Zahl gerade angenommen wurde, zusammensetzen lassen. Da nun das Product aller dieser Grössen h ist (420.), so folgt, dass, wenn u eines der partiellen Producte ist, $\frac{h}{u}$ ein anderes seyn muss [*weil nämlich jetzt* $\frac{h}{u}$ *eben so viel Factoren hat als* u]. Ist also u eine

Zerlegung von

Wurzel der aufzulösenden Gleichung, so ist $\frac{h}{u}$ ebenfalls eine. Diese Gleichung muss also unverändert die nämliche bleiben, wenn man $\frac{h}{u}$ statt u setzt.

Substituirt man in die Gleichung mit u (443.)

$$456.\quad Z = u^\mu - Au^{\mu-1} + Bu^{\mu-2} \ldots\ldots$$
$$- Ru^3 + Su^2 - Tu + V = 0,$$

$\frac{h}{u}$ statt u, so erhält man, nachdem das Resultat mit u^μ multiplicirt und mit V dividirt worden,

$$457.\quad u^\mu - \frac{hT}{V}u^{\mu-1} + \frac{h^2S}{V}u^{\mu-2} - \frac{h^3R}{V}u^{\mu-3} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots - \frac{h^{\mu-3}C}{V} + \frac{h^{\mu-2}B}{V} - \frac{h^{\mu-1}A}{V}u + \frac{h^\mu}{V} = 0,$$

und da nun die beiden Gleichungen (456.) und (457.) identisch die nämlichen sind, so muss

$$458.\quad A = \frac{hT}{V},\ B = \frac{h^2S}{V},\ C = \frac{h^3R}{V}\ etc.$$

seyn. Es war aber $V = h^\nu$ (432.), wo $\nu = \frac{\mu n}{m}$ (432.) ist. Dieses giebt hier, weil $m = 2n$ seyn soll, $\nu = \frac{1}{2}\mu$, so dass ν eine ungerade Zahl ist (455.). Es ist also [*aus* (458.)]

$$459.\quad T = Ah^{\nu-1},\ S = Bh^{\nu-2},\ R = Ch^{\nu-3}\ etc.$$

Substituirt man dieses in die Gleichung mit u (456.), setzt 2ν statt $\mu\nu$ und nimmt die Glieder zusammen, welche gleich weit von der Mitte entfernt sind, so erhält man

Polynomen.

$$460.\quad u^{2\nu} + h^{\nu} - A(u^{2\nu-1} + h^{\nu-1}u) + B(u^{2\nu-2} + h^{\nu-2}u^2) - C(u^{2\nu-3} + h^{\nu-3}u^3) \ldots = 0.$$

181.

Diese Gleichung hat die allgemeine Form der reciproken Gleichungen, deren Ordnungs-Zahl immer auf die Hälfte vermindert werden kann.

Dividirt man nämlich die Gleichung (460.) durch u^{ν}, so erhält man

$$461.\quad u^{\nu} + \frac{h^{\nu}}{u^{\nu}} - A\left(u^{\nu-1} + \frac{h^{\nu-1}}{u^{\nu-1}}\right) + B\left(u^{\nu-2} + \frac{h^{\nu-2}}{u^{\nu-2}}\right) - C\left(u^{\nu-3} + \frac{h^{\nu-3}}{u^{\nu-3}}\right) \ldots = 0.$$

Setzt man nun

$$462.\quad u + \frac{h}{u} = y,$$

so ist

$$463.\quad \begin{cases} u^2 + \dfrac{h^2}{u^2} + 2h = y^2 \\ u^3 + \dfrac{h^3}{u^3} + 3h\left(u + \dfrac{h}{u}\right) = y^3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

woraus

$$464.\quad \begin{cases} u + \dfrac{h}{u} = y \\ u^2 + \dfrac{h^2}{u^2} = y^2 - 2h \\ u^3 + \dfrac{h^3}{u^3} = y^3 - 3hy \end{cases}$$

Zerlegung von

und allgemein

$$465.\quad u^\lambda + \frac{h^\lambda}{u^\lambda} = y^\lambda - \lambda h y^{\lambda-2} + \frac{\lambda(\lambda-3)}{2} h^2 y^{\lambda-4} - \frac{\lambda(\lambda-4)(\lambda-5)}{2\cdot 3} h^3 y^{\lambda-6} \ldots\ldots$$

folgt.

Durch diese Substitution lässt sich die Gleichung mit u (460.) vom 2νten Grade auf eine Gleichung mit y vom νten Grade reduciren, welche von der Form

$$466.\quad y^\nu - A_{,} y^{\nu-1} + B_{,} y^{\nu-2} - C_{,} y^{\nu-3} \ldots\ldots = 0$$

ist, wenn man

$$467.\quad \begin{cases} A = A_{,} \\ B - \nu h = B_{,} \\ C - (\nu-1) hA = C_{,} \\ D - (\nu-2) hB + \frac{\nu(\nu-3)}{2} h^2 = D_{,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

setzt (464. 465.).

Hierauf ist u in y durch die Gleichung [$u + \frac{h}{u} = y$ (462.), *oder*] $u^2 - uy + h = 0$ gegeben, aus welcher

$$468.\quad u = \tfrac{1}{2} y \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{(y^2 - 4h)}$$

folgt.

182.

Hieraus folgt, dass man nur die Hälfte der Coefficienten A, B, C der Gleichung mit u (443.) berechnen darf, welches die Rechnung auf die Hälfte vermindert. Desgleichen folgt, dass der Exponent ν eine ungerade Zahl ist, weil im gegenwärtigen Falle

Polynomen.

μ die Form 2ω hat (§. 180.), und dass folglich die Gleichung mit y (466.) nothwendig eine reelle Wurzel haben muss.

Damit aber auch u eine reelle Grösse sey, ist es nicht hinreichend, dass y es ist; vielmehr muss alsdann auch noch $y^2 - 4h$ positiv seyn [(468.) *weil sonst die Wurzel-Grösse in dem Ausdrucke von u durch y nicht reell ist*]. Dieses letzte ist nothwendig immer der Fall, wenn h negativ ist. In diesem Fall also ist das Polynom von der Ordnung 2^ϱ, durch zwei Polynome von der Ordnung $2^{\varrho-1}$ auflösbar. Ist dagegen h positiv, so muss man noch sehen, ob sich ein reeller Werth von y finden lässt, welcher grösser ist als $4h$.

183.

Es sey also

$$469.\quad y^2 - 4h = z,$$

und man setze in die obige Gleichung mit y (466.) $\sqrt{(z+4h)}$ statt y, so erhält man, nachdem die Wurzelgrösse durch Quadriren weggeschafft ist und die Glieder nach Potenzen von z geordnet sind, eine Gleichung in z von der nämlichen Ordnung. [*Man bringe nämlich die Gleichung* (466.) *auf die Form*

$$y(y^{\nu-1} + B_, y^{\nu-3} + D_, y^{\nu-5} \ldots.)$$
$$= A_, y^{\nu-1} + C_, y^{\nu-3} \ldots.,$$

so erhält man, wenn man quadrirt,

$$y^2(y^{2\nu-2} + 2B_, y^{2\nu-4} + B_,^2 y^{2\nu-6} \ldots.)$$
$$= A_,^2 y^{2\nu-2} + 2A_, C_, y^{2\nu-4} + C_,^2 y^{2\nu-4} \ldots.,$$

Zerlegung von

welche Gleichung nur lauter gerade Potenzen von y enthält. Setzt man also $z + 4h$ statt y^2, so erhält man eine Gleichung mit z vom Grade ν.] Diese Gleichung wird nothwendig eine reelle Wurzel haben, wenn ihr letztes Glied negativ ist. Da nun ν ungerade ist, so ist ihr letztes Glied das Product aller Wurzeln negativ genommen. Es kommt also darauf an, ob das Product aller Werthe von z nothwendig positiv ist, wenn man h positiv annimmt.

Da $z = y^2 - 4h$ und $y = u + \frac{h}{u}$ (462.), so ist

$$\left[z = \left(u + \frac{h}{u}\right)^2 - 4h = u^2 + 2h + \frac{h^2}{u^2} - 4h, \textit{ oder}\right]$$

$$470. \quad z = u^2 + \frac{h^2}{u^2} - 2h = \left(u - \frac{h}{u}\right)^2.$$

Nun sind die Werthe von u alle Producte, welche durch Multiplication der Hälfte der Grössen α, β, γ entstehen, und, wie wir oben [*in (§. 180.)*] sahen, sind die Werthe von $\frac{h}{u}$ die Producte der andern Hälfte der Grössen. Die Werthe von $u - \frac{h}{u}$ sind also einander zu zweien gleich, mit entgegengesetzten Zeichen. [*Wenn z. B. sechs Wurzeln α, β, γ, δ, ε, ζ vorhanden wären, so wäre ein Werth von $u - \frac{h}{u}$ gleich $\alpha\beta\gamma - \delta\varepsilon\zeta$, und ein anderer gleich $\delta\varepsilon\zeta - \alpha\beta\gamma$, welche Werthe einander gleich sind, mit entgegengesetzten Zeichen.*] Man erhält also alle die verschiedenen Werthe von z, wenn man u nur die Hälfte seiner verschiedenen Werthe giebt.

Polynomen.

Daraus folgt, dass, so lange das Product der Werthe von $u - \frac{h}{u}$ eine rationale Function der Coefficienten $a, b, c \ldots$ ist, das Product aller Werthe von z nothwendig positiv seyn muss, weil nämlich z das Quadrat von $u - \frac{h}{u}$ ist (470.).

Wären vier Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ da, so wären die möglichen Werthe von u folgende:

471. $\alpha\beta,\ \alpha\gamma,\ \alpha\delta,\ \beta\gamma,\ \beta\delta,\ \gamma\delta$

und die verschiedenen Werthe von $u - \frac{h}{u}$ sind, wenn man für u nur die drei ersten Producte nimmt,

472. $\alpha\beta - \gamma\delta,\ \alpha\gamma - \beta\delta$ und $\alpha\delta - \beta\gamma$.

Das Product dieser drei Grössen ist

473. $$\left\{\begin{array}{l} \alpha^3\beta\gamma\delta + \alpha\beta^3\gamma\delta + \alpha\beta\gamma^3\delta + \alpha\beta\gamma\delta^3 \\ - \alpha^2\beta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2\delta^2 - \alpha^2\gamma^2\delta^2 - \beta^2\gamma^2\delta^2, \end{array}\right.$$

wo, wie man sieht, der positive oder negative Theil unveränderliche und symmetrische Functionen der Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind und folglich vermittelst der obigen Ausdrücke durch a, b, c, d bestimmt werden können.

184.

Wir wollen dieses Resultat allgemeiner nehmen und, der Kürze wegen, die verschiedenen Producte, welche die Hälfte der Grössen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ geben, wenn man darin eine der Grössen α überall beibehält, durch $P, Q, R \ldots$, und die Producte der andern Hälfte der Grössen, welche ich reciproke

Zerlegung von

nennen will, durch $p, q, r \ldots$ bezeichnen. Ich will nun zunächst zeigen, dass die Grössen $P, Q, R \ldots$ und die reciproken Grössen $p, q, r \ldots$ alle Werthe von u enthalten. Wir sahen nämlich, dass die Zahl dieser Werthe gleich μ ist, und da jetzt $m = 2n$ ist, so ist

$$474. \quad \mu = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n} = \frac{2(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n-1}.$$

Auf der andern Seite ist klar, dass, weil die Grössen $P, Q, R \ldots$ alle die eine Grösse α enthalten, ihrer so viel seyn müssen, als man $n-1$ Grössen aus $2n-1$ Grössen nehmen kann, also

$$475. \quad \frac{(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2\ldots n-1} = \frac{\mu}{2} = \nu.$$

[*Diese Zahl ist, wie man sieht, die Hälfte der obigen* (474.); *also ist die Zahl der Grössen* P, $Q, R \ldots$ *gleich* $\frac{\mu}{2} = \nu$.]

Da also auf diese Weise die Grössen $P, Q, R \ldots$ die Hälfte aller Werthe von u ausmachen, so ist es hinreichend, dieselben für die verschiedenen Werthe von u zu nehmen. Die Grössen $p, q, r \ldots$ sind alsdann die correspondirenden Werthe von $\frac{h}{u}$. Es kommt also nur darauf an, ob das Product

$$476. \quad (P-p)(Q-q)(R-r)\ldots$$

nothwendig eine symmetrische Function der Grössen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ ist, in welchem Falle man versichert ist,

dass es rational durch die Coefficienten a, b, c.... ausgedrückt werden könne.

Zunächst ist klar, dass alle die Verwechselungen, welche man mit den Grössen β, γ, δ.... [*α befindet sich in allen zugleich*] machen kann, nur Verwechselungen der Producte P, Q, R.... hervorbringen. Eben so verhält es sich mit den reciproken Grössen. Aus diesen Verwechselungen entstehet also keine Veränderung der Grösse (476.) $(P-p)(Q-q)(R-r)$....

Betrachten wir ferner die Vertauschungen von α mit andern Grössen β, γ, δ...., so ist klar, dass z. B. diejenigen Grössen, welche zugleich α und β enthalten, keine Veränderung erleiden. Es kommen also nur diejenigen Grössen in Betracht, welche β nicht enthalten. Wäre P eine solche Grösse, so muss dagegen p nothwendig β enthalten, weil in den beiden Grössen P und p zusammen, nothwendig β enthalten ist u. s. w. Daraus folgt, dass durch die Vertauschung von α mit β jede Grösse P, Q...., welche nicht β enthält, nur in eine der reciproken p, q, r.... übergeht, welche nach der Voraussetzung kein α enthält. Wenn z. B. P in q übergeht, so wird aus Q nothwendig p, also wird $q-Q$ aus $P-p$ und zugleich $p-P$ aus $Q-q$. Also bleiben überhaupt die verschiedenen Factoren, wenn man die Grössen α, β, γ.... unter sich vertauscht, entweder ganz die nämlichen, oder vertauschen sich blos unter sich, während sie zugleich die Zeichen wechseln.

Zerlegung von

185.

Nun ist die Zahl der Producte P, Q, R...., welche durch die Verwechselung von α und β nicht vertauscht werden, nothwendig der Zahl der Producte gleich, in welchen sich α und β zugleich befinden. Die Gesammtzahl der Grössen α, β, γ.... aber ist $2n$, also ist die Zahl dieser Grössen in jedem Producte gleich n, und folglich die Zahl der Producte, welche α und β zugleich enthalten, diejenige der Combinationen von $n-2$ Dingen unter $2n-2$ Dingen, welche Zahl

$$477.\quad \sigma = \frac{(2n-2)(2n-3)\ldots\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots\ldots(n-2)}$$

ist.

Vergleicht man diese Zahl mit der obigen Zahl ν (475.), so sieht man, dass

$$478.\quad \sigma = \nu.\frac{n-1}{2n-1}$$

ist.

Nun ist die Gesammtzahl der Grössen P, Q, R.... gleich ν (475.). Zieht man davon die Zahl σ (477.) ab, so erhält man $[\nu-\sigma=\nu-\nu\frac{n-1}{2n-1} = \nu\left(\frac{2n-1-n+1}{2n-1}\right)$, *oder*]

$$479.\quad \nu-\sigma=\varphi=\frac{n}{2n-1}.\nu,$$

welches die Zahl derjenigen Producte P, Q, R.... ist, die durch die Verwechselung von α und β in die reciproken Producte p, q, r.... übergehen. Diese Zahl ist also auch diejenige der Factoren $P-p$, $Q-q$,

Polynomen.

$Q-q$, $R-r\ldots$, welche bei dieser Vertauschung das Zeichen wechseln. So lange also n eine gerade Zahl ist und folglich so lange der Exponent $m=2n$ einer Potenz von 2 grösser als 2 ist, ist die Zahl $\varphi=\frac{n\nu}{2n-1}$ der Factoren $P-p$, $Q-q$, $R-r\ldots$ nothwendig gerade [*denn da* $\nu=\frac{1}{2}\mu$ *und* $\mu=2\omega$ *ist, wo* ω *eine ungerade Zahl bedeutet* (*§.* 180.), ν *also nothwendig ungerade ist, so ist* $n\nu$ *gerade, wenn* n *gerade ist, also da zugleich* $2n-1$ *ungerade ist,* $\varphi=\frac{n\nu}{2n-1}$ *nothwendig gerade*]. Daraus folgt, dass das gesammte Product (476.)

$$(P-p)(Q-q)(R-r)\ldots$$

sich durch die Vertauschung von α und β nicht ändert. Eben so verhält es sich sich bei der Vertauschung von α mit γ, δ *etc.*

Das Product $(P-p)(Q-q)(R-r)\ldots$ ist also nothwendig eine unveränderliche [*oder symmetrische*] Function der Grössen α, β, $\gamma\ldots$ und kann folglich durch rationale Functionen der Coefficienten a, b, $c\ldots$ des gegebenen Polynoms bestimmt werden. Mithin ist das letzte Glied der Gleichung mit z von der ungeraden Ordnung ν nothwendig negativ [(*§.* 183.)], und folglich hat diese Gleichung nothwendig eine reelle positive Wurzel (§. 3.).

Nimmt man diesen positiven Werth von z, so ist $z=\left(u-\frac{h}{u}\right)^2$ (470.), und folglich $u-\frac{h}{u}=\sqrt{z}$, mithin $u^2-u\sqrt{z}-h=0$, woraus

Zerlegung von

$$480. \quad u = \tfrac{1}{2}\sqrt{z} \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}z + h)}$$

folgt, welche Grösse nothwendig positiv ist, weil [*ausser z auch*] *h* positiv ist (§. 183.).

Jedes Polynom von der Ordnung 2^ϱ kann also durch die obigen Formeln, so lange ϱ grösser als Eins ist, sein letztes Glied *h* mag positiv oder negativ seyn, immer in zwei reelle Polynomen von der Ordnung $2^{\varrho-1}$ zerlegt werden, und man erhält zugleich diese beiden Polynomen, wenn man den zweifachen Werth von *u* nimmt.

Fügt man diesen Schluss zu denjenigen weiter oben (§. 179.) für jedes Polynom von der Ordnung $2^\varrho\tau$, so folgt ganz allgemein, dass jedes beliebige Polynom [*mit reellen Coefficienten*] in reelle Factoren des ersten und zweiten Grades zerlegt werden könne.

186.

Wendet man diese Theorie der Zerlegung der Polynome auf die Gleichungen an, so sieht man, dass jede beliebige Gleichung in zwei andere Gleichungen zerlegt werden kann, deren Coefficienten reell sind und nur von einer einzigen reellen Wurzel einer bestimmten Gleichung abhangen. Nun kann man nach dem ersten Abschnitte die Grenzen einer solchen Wurzel blos durch die Substitution der natürlichen Zahlen 1 . 2 . 3 finden, auch die Grenzen durch wiederholte Substitutionen so enge zusammenziehen als man will.

Polynomen.

Man kann also jede numerische Gleichung in zwei andere numerische Gleichungen zerlegen, deren Coefficienten so genau gefunden werden können als man will. Zerfällt man diese Gleichungen weiter, so kommt man endlich auf Gleichungen der ersten und zweiten Ordnung, welche unmittelbar alle reelle und imaginaire Wurzeln der gegebenen Gleichung geben.

Dieses wäre also eine Auflösungs-Methode numerischer Gleichungen, welche von der Untersuchung der Grenzen der Wurzeln ganz unabhängig ist, und welche in diesem Betracht einige Vorzüge vor dem Verfahren in den beiden ersten Abschnitten zu haben scheint. Indess muss man gestehen, dass diese Methode, einige besondere Fälle, wo die Zerlegung der gegebenen Gleichung leicht ist, ausgenommen, wegen der Menge und Weitläufigkeit der erforderlichen Operationen unausführbar ist. Auch ist die Haupt-Absicht des gegenwärtigen Zusatzes nur, a priori die Möglichkeit der Zerlegung der Polynome und Gleichungen in reelle Factoren des ersten und zweiten Grades zu beweisen, welches bis jetzt noch nicht direct und vollständig geschehen war.

Näherungs-Ausdrücke der

Eilfter Zusatz.

Ueber die Näherungs-Ausdrücke für die Wurzeln der Gleichungen.

187.

Im fünften Zusatze sahen wir, dass die Newtonsche Gleichungs-Auflösungs-Methode darin besteht, der Reihe nach in eine und dieselbe Function die Resultate vorhergehender Substitutionen zu setzen. Das letzte Resultat solcher Substitutionen kann man in einen Ausdruck zusammenfassen.

Es sey

$$481. \quad Fx = 0$$

die gegebene Gleichung, und a der erste näherungsweise Werth einer ihrer Wurzeln. Nach der Newtonschen Methode muss man $a+p$ statt x setzen, und in der Entwickelung alle Glieder, die p in höhern als der ersten Potenz enthalten, weglassen.

Nach der bekannten Entwickelungs-Art der Functionen geht die Gleichung $Fx = 0$, wenn man $a+p$ statt x setzt, in

$$482. \quad Fa + p\frac{dFa}{da} + \frac{p^2}{2}\frac{d^2Fa}{da^2} \ldots = 0$$

Wurzeln der Gleichungen.

über, welches sich [*wenn man alle höhere Potenzen von p weglässt*] auf

$$483.\quad Fa + p\frac{dFa}{da} = 0$$

reducirt, woraus

$$484.\quad p = -Fa : \frac{dFa}{da}$$

folgt. Ist nun a die erste Grösse, welcher x nahe kommt, so kommt, wenn man

$$485.\quad -Fa : \frac{dFa}{da} = b$$

setzt, die Grösse $a + b$ dem x noch näher, und $a + b$ giebt auf dieselbe Weise

$$486.\quad c = -F(a+b) : \frac{dF(a+b)}{d(a+b)}.$$

Die dritte Grösse, welche x näher kommt, ist $a + b + c$, die vierte $a + b + c + d$ u. s. w.

Nun ist zu bemerken, dass, wenn b (485.) sehr klein ist, der Werth von $F(a + b)$ ebenfalls sehr klein und von der Ordnung wie b^2 seyn wird: denn entwickelt man $F(a + b)$, so erhält man $Fa + b\frac{dFa}{da} + \frac{b^2}{2}\frac{d^2Fa}{da^2}\ldots.$ Nun ist $b = -Fa : \frac{dFa}{da}$, also ist [$F(a+b) = Fa - \left(Fa : \frac{dFa}{da}\right)\frac{dFa}{da} + \frac{b^2}{2}\frac{d^2Fa}{da^2}\ldots.$, *oder*] $F(a + b) = \frac{b^2}{2}\frac{d^2Fa}{da^2}\ldots.$ Also ist auch $c = -\frac{F(a+b)}{d(a+b)}$ von der Ordnung wie b^2. Eben so ist $F(a+b+c)$ von der Ordnung wie c^2 und folglich von der Ordnung wie b^4. Denn es ist $F(a+b+c)$

Näherungs-Ausdrücke der

$$= F(a+b) + c\frac{dF(a+b)}{d(a+b)} + \frac{c^2}{2}\frac{d^2F(a+b)}{d(a+b)}\ldots;$$

also, weil $c = -F(a+b):\frac{dF(a+b)}{d(a+b)}$ ist, $F(a+b+c) \doteq \frac{c^2}{2}\frac{d^2F(a+b+c)}{d(a+b+c)}\ldots$ Ferner ist der Werth von $\mathfrak{d}$, weil $\mathfrak{d} = -F(a+b+c):\frac{dF(a+b+c)}{d(a+b+c)}$, von der Ordnung wie b^4 u. s. w. Daraus folgt, dass, wenn Fa sehr klein ist, die Abweichung der Annäherungen $a+b$, $a+b+c$, $a+b+c+d$ *etc.* vom wahren Werthe von x von der Ordnung der Potenzen 2, 4, 8 von Fa ist.

Dieses Verfahren ist für die Berechnung in Zahlen sehr bequem. Aber wenn man einen Ausdruck, der nach Potenzen von Fa geordnet ist, verlangte, so müsste man der Reihe nach alle Functionen entwickeln, und würde alsdann die Reihe

487. $$a - Fa:\frac{dFa}{da} - \left(\frac{Fa}{2}\right)^2\cdot\frac{d^2Fa}{da^2}:\left(\frac{dFa}{da}\right)^3$$
$$+\frac{(Fa)^3}{2\cdot3}\cdot\frac{d^3Fa}{da^3}:\left(\frac{dFa}{da}\right)^4 - \frac{(Fa)^3}{2}\cdot\left(\frac{d^2Fa}{da^2}\right)^2:\left(\frac{dFa}{da}\right)^5\ldots$$

finden.

188.

Man könnte diese Ausdrücke kürzer finden, wenn man aus der Gleichung

488. $$\alpha + p\,d\alpha + \tfrac{1}{2}p^2\,d^2\alpha\ldots = 0 \quad (482.)$$

den Werth von p suchte. [*Um den Setzer zu schonen, habe ich statt* Fa *blos* α, *statt* $\frac{dFa}{da}$, $d\alpha$, *statt* $\frac{d^2Fa}{da^2}$, $d^2\alpha$ *etc. gesetzt.*]

Wurzeln der Gleichungen.

Dieses würde

489. $$p = -\frac{\alpha}{d\alpha} - \frac{1}{d\alpha}\left(\tfrac{1}{2}p^2\, d^2\alpha + \frac{p^3}{2.3}\, d^3\alpha \ldots\right)$$

geben. Substituirte man allmählig diesen ersten Werth von p in die Glieder, welche p^2, p^3 enthalten, oder vielmehr, setzte man sogleich [*in die Gleichung* (488.)]

490. $$p = A\alpha + B\alpha^2 + C\alpha^3 \ldots$$

und die Glieder mit gleichen Potenzen von α gleich Null, welches die zu Bestimmung der Coefficienten A, B, C nöthige Gleichung giebt, so erhielte man

$$A\,d\alpha + 1 = 0$$

$$B\,d\alpha + \tfrac{1}{2}A^2\, d^2\alpha = 0$$

$$C\,d\alpha + B\,d^2\alpha + \frac{1}{2.3}A^3 d^3\alpha = 0$$

. ,

woraus

491. $$\begin{cases} A = -\dfrac{1}{d\alpha} \\[2ex] B = -\dfrac{d^2\alpha}{2\,d\alpha^3} \\[2ex] C = -\dfrac{d^2\alpha^2}{2\,d\alpha^5} + \dfrac{d^3\alpha}{2.3.\,d\alpha^4} \end{cases}$$

.

und hieraus [*für* $a + p = x$] die Reihe

492. $$a + A\alpha + B\alpha^2 + C\alpha^3 \ldots$$

folgt, welche die nämliche seyn würde wie (487.), welches die Uebereinstimmung der beiden Methoden zeigt.

Näherungs-Ausdrücke der

189.

Aber man kann zu dem nämlichen Resultate noch auf einem directern und mehr analytischen Wege gelangen.

Die Aufgabe ist nämlich, aus der Gleichung

$$493.\quad F(a+p)=0$$

die Werthe von p, in eine Reihe ausgedrückt, zu finden.

Man kann die Grösse a als Function einer andern Grösse λ betrachten, und annehmen, a gehe in $a+p$ über, wenn man $\lambda+k$ statt λ setzt. Da dieses allgemein $a+p=a+k\frac{da}{d\lambda}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2a}{d\lambda^2}\ldots.$ giebt, so erhält man

$$494.\quad p=k\frac{da}{d\lambda}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2a}{d\lambda^2}+\frac{k^3}{2.3}\frac{d^3a}{d\lambda^3}\ldots.$$

Da aber die Grösse a unbestimmt ist, so kann man sie so annehmen, dass

$$495.\quad Fa=\lambda$$

ist. Alsdann ist

$$496.\quad F(a+p)=\lambda+k$$

und $F(a+p)=0$ (490.) giebt $\lambda+k=0$, also $k=-\lambda=-Fa$, folglich (in 494.)

$$497.\quad p=-\lambda\frac{da}{d\lambda}+\frac{\lambda^2}{2}\frac{d^2a}{d\lambda^2}-\frac{\lambda^3}{2.3}\frac{d^3a}{d\lambda^3}\ldots.,$$

wo nur noch die Werthe von $\frac{da}{d\lambda}, \frac{d^2a}{d\lambda^2}, \frac{d^3a}{d\lambda^3}\ldots.$ zu finden sind.

Diese Grössen sind die Ableitungen von a, wenn

Wurzeln der Gleichungen.

man a als Function von λ betrachtet. Nun hat man zur Bestimmung von λ durch a die Gleichung $Fa = \lambda$ (495.). Nimmt man also die Ableitungen von a nach λ, indem man [*umgekehrt*] a als Function von λ betrachtet, so erhält man

$$\frac{da}{d\lambda}\cdot\frac{d\lambda}{da},\ \frac{da}{d\lambda}\cdot\frac{d^2\lambda}{da^2}\ldots.$$

Da nun, vermöge der Gleichung $Fa = \lambda$ (495.), $\frac{da}{d\lambda}\cdot\frac{d\lambda}{da} = 1$ ist, so ist

$$498.\quad \frac{da}{d\lambda} = 1 : \frac{d\lambda}{da},$$

und hieraus, wenn man von neuem die Ableitungen nimmt und den Werth von $\frac{da}{d\lambda}$ substituirt,

$$499.\ \begin{cases} \frac{d^2a}{d\lambda^2} = -\frac{da}{d\lambda}\cdot\frac{d^2\lambda}{da^2} : \left(\frac{d\lambda}{da}\right)^2 = -\frac{d^2\lambda}{da^2} : \left(\frac{d\lambda}{da}\right)^3 \\ \frac{d^3a}{d\lambda^3} = -\frac{da}{d\lambda}\cdot\frac{d^3\lambda}{da^3} : \left(\frac{d\lambda}{da}\right)^3 + 3\frac{da}{d\lambda}\cdot\left(\frac{d^2\lambda}{da^2}\right)^2 : \left(\frac{d\lambda}{da}\right)^4 \\ \quad = -\frac{d^3\lambda}{da^3} : \left(\frac{d\lambda}{da}\right)^4 + 3\left(\frac{d^2\lambda}{da^2}\right)^2 : \left(\frac{d\lambda}{da}\right)^3 \end{cases}$$

etc. Auf diese Weise findet man die Werthe von $\frac{da}{d\lambda}$, $\frac{d^2a}{d\lambda^2}$, $\frac{d^3a}{d\lambda^3}$ *etc.*, mit welchen man die Reihe für $a + p$, nämlich die Reihe (497.)

$$500.\quad a - \lambda\frac{da}{d\lambda} + \frac{\lambda^2}{2}\frac{d^2a}{d\lambda^2} - \frac{\lambda^3}{2.3}\frac{d^3a}{d\lambda^3}\ldots.,$$

die den Werth von x aus der Gleichung $Fx = 0$ ausdrückt (493.), so weit fortsetzen kann als man will.

Diese Reihe stimmt mit derjenigen überein,

Näherungs-Ausdrücke der

welche Euler im zweiten Bande seiner Differential-Rechnung, im neunten Kapitel §. 234. gegeben hat. Man sieht aus der Abhandlung von Courtivron, in den Abhandlungen der Academie der Wissenschaften vom Jahre 1744, dass Euler sie schon um diese Zeit gefunden hatte, und sie gehört in die Zahl der Entdeckungen, mit welchen er die Analysis bereicherte. Auf die obige Art dargestellt, ist das Resultat eine natürliche Folge der Entwickelung der Functionen.

190.

Wir wollen nun die obigen Resultate mit denjenigen verbinden, welche die wiederkehrenden Reihen geben.

Nach dem Verfahren im sechsten Zusatze [(§. 119.) *etc.*] muss man, um den Werth der Wurzel p der Gleichung

$$501.\quad \alpha + p\frac{d\alpha}{da} + \frac{p^2}{2}\frac{d^2\alpha}{da^2} + \frac{p^3}{2.3}\frac{d^3\alpha}{da^3}\dots$$

zu finden, den Bruch

$$502.\quad \frac{\frac{d\alpha}{da} + p\frac{d^2\alpha}{da^2} + \frac{p^2}{2}\frac{d^3\alpha}{da^3}\dots}{\alpha + p\frac{d\alpha}{da} + \frac{p^2}{2}\frac{d^2\alpha}{da^2}\dots}$$

nach Potenzen von p entwickeln. Sind Tp^{μ} und $Vp^{\mu+1}$ zwei auf einander folgende Glieder, so ist um so genauer

$$503.\quad p = \frac{T}{V},$$

je weiter T und V vom Anfange der Reihe entfernt sind.

Wurzeln der Gleichungen.

Gewöhnlich findet man die Glieder einer wiederkehrenden Reihe eins aus dem andern. Diese Methode ist für die wirkliche Berechnung in Zahlen bequem. Sie giebt aber nicht den allgemeinen Ausdruck der Coefficienten der Gleichung. Diesen zu finden, muss man anders verfahren.

191.

Um die Untersuchung so allgemein wie möglich zu machen, wollen wir den Bruch

$$504.\quad \frac{\varphi x}{u - x + fx} \;(= L)$$

nehmen, in welchem φx und fx Functionen von x, wie

$$505.\quad \begin{cases} fx = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots \\ \varphi x = P + Qx + Rx^2 + Sx^3 \ldots \end{cases}$$

sind.

Die durch die Entwickelung des gegebenen Bruchs L nach Potenzen von x entstehende Reihe wollen wir durch

$$506.\quad (0) + (1)x + (2)x^2 + (3)x^3 + \ldots = L$$

bezeichnen.

Wir wollen nun den gegebenen Bruch (504.) zunächst nach Potenzen von fx entwickeln [*und zwar durch Division*]. Dieses giebt

$$507.\quad L = \frac{\varphi x}{u - x} - \frac{\varphi x\, fx}{(u - x)^2} + \frac{\varphi x\, fx^2}{(u - x)^3} \ldots$$

Die Glieder dieser Reihen wollen wir einzeln untersuchen, und die aus Entwickelung derselben entstehenden Coefficienten von x^n suchen.

Näherungs-Ausdrücke der

Der Bruch $\frac{1}{u-x}$ giebt die Reihe

$$508.\quad \frac{1}{u-x} = \frac{1}{u} + \frac{x}{u^2} + \frac{x^2}{u^3} + \frac{x^3}{u^4} \ldots$$

Multiplicirt man denselben durch den Reihen-Ausdruck von φx (505.), so sind die x^n enthaltenden Glieder des Products folgende:

$$509.\quad \left(\frac{P}{u^{n+1}} + \frac{Q}{u^n} + \frac{R}{u^{n-1}} + \frac{S}{u^{n-2}} \ldots\right) x^n.$$

Da die Exponenten von u in den Nennern abnehmen, so endigt die Reihe mit dem Gliede, welches u im Nenner hat.

192.

Nimmt man nun die Function φx, dividirt sie durch x^{n+1}, setzt darauf u statt x und behält nur die Glieder bei, welche u, oder Potenzen von u, im Nenner enthalten; so ist leicht zu sehen, dass man auf diese Weise die Reihe erhält, in welche x^n multiplicirt ist. Der Theil der Entwickelung von $\frac{\varphi x}{u-x}$, welcher x^n als Factor enthält, kann also durch

$$510.\quad \frac{\varphi u}{u^{n+1}} \cdot x^n$$

ausgedrückt werden, unter der Bedingung, dass man von dieser Grösse nur die Glieder nimmt, welche u im Nenner enthalten. [*In der That folgt aus* (505.), *wenn man daselbst u statt x setzt,*

$$\varphi u = P + Qu + Ru^2 + Su^3 \ldots \text{ und}$$

Wurzeln der Gleichungen.

$$\frac{\varphi u}{u^{n+1}} = \frac{P}{u^{n+1}} + \frac{Q}{u^n} + \frac{R}{u^{n-1}} + \frac{S}{u^{n-2}} \ldots,$$

also die Grösse (509.) *gleich* $\frac{\varphi u}{u^{n+1}} . x^n$].

Eben so wenn man den Coefficienten von x^n in der Entwickelung der Grösse $\frac{\varphi x . f x}{u - x}$ nach Potenzen von x suchte, würde man

$$511. \quad \frac{\varphi u . f u}{u^{n+1}} x^n$$

finden, unter der Bedingung, dass man wieder nur die Glieder nimmt, welche u im Nenner haben.

Da auf diese Weise $\frac{\varphi u . f u}{u^{n+1}}$ und der Coefficient von x^n in der Entwickelung von $\frac{\varphi x . f x}{u - x}$ identisch das Nämliche sind, so sind auch die Ableitungen dieser Grössen nach u identisch das Nämliche; woraus folgt, dass die erste Ableitung der Grösse $\frac{\varphi u . f u}{u^{n+1}}$, nach u genommen, dem Coefficienten von x^n, in der Entwickelung der ersten Ableitung von $\frac{\varphi x . f x}{u^{n+1}}$ genommen, gleich ist.

Da aber in der Grösse $\frac{\varphi x . f x}{u - x}$ die Grösse u nur im Nenner vorkommt, und die erste Ableitung von $\frac{1}{u - x}$ gleich $-\frac{1}{(u - x)^2}$ ist, so folgt, dass die erste Ableitung von $\frac{\varphi u . f u}{u^{n+1}} . x^n$, nach u genommen,

Näherungs-Ausdrücke der

demjenigen Theile der Entwickelung von $-\frac{\varphi x . f x}{(u-x)^2}$ gleich ist, welcher x^n enthält, immer unter der Bedingung, dass man in $\frac{\varphi u . f u}{u^{n+1}}$, und folglich auch in der Ableitung dieser Grösse nur die Glieder beibehält, welche u im Nenner enthalten. [*Das Original bezeichnet die Ableitungen auf seine Weise durch Striche. Da die alten Zeichen hier allzuviel Raum gekostet haben würden, so habe ich den Sinn derselben durch Worte ausgedrückt. Die alten Zeichen sind in der That öfters so sehr unvollkommen, dass selbst Worte kürzer sind. Es ist mit diesen Zeichen zuweilen noch so, wie es mit den algebraischen Bezeichnungen um die Zeit war, als die Algebra noch „regula coss.“ hiess.*]

Man findet auf dieselbe Weise, dass der Coefficient von x^n in der Entwickelung des dritten Gliedes der Reihe (507.) $\frac{\varphi x . f x^2}{u-x}$ nach Potenzen von x gleich $\frac{\varphi u . f u^2}{u^{n+1}}$ ist, wenn man nämlich nur die Glieder nimmt, welche Potenzen von u im Nenner enthalten. Die Identität findet also auch in Rücksicht der Ableitungen nach u statt; folglich ist die zweite Ableitung von $\frac{\varphi u . f u^2}{u^{n+1}}$, nach u genommen, dem Gliede mit x^n in der Entwickelung der zweiten Ableitung von $\frac{\varphi x . f x^2}{u-x}$, nach x genommen, gleich.

Wurzeln der Gleichungen.

Da nun die erste Ableitung von $\frac{1}{u-x}$ nach u, gleich $-\frac{1}{(u-x)^2}$, die zweite Ableitung gleich $\frac{2}{(u-x)^3}$ ist, so folgt, wenn man auf beiden Seiten mit 2 dividirt, dass die zweite Ableitung von $\left(\frac{\varphi u \,.\, fu^2}{2u^{n+1}}\right) x^n$, nach u genommen, dem Theile der Entwickelung von $\frac{\varphi x \,.\, fx_2}{(u-x)^2}$ gleich ist, welcher x^n enthält, wieder unter der Bedingung, dass man überall nur die Glieder nimmt, welche u im Nenner haben.

Ganz auf die nämliche Weise lässt sich zeigen, dass die dritte Ableitung der Grösse $\frac{\varphi u \,.\, fu^3}{2 \,.\, 3 \,.\, u^{n+1}}$, nach u genommen, dem Theile der Entwickelung von $-\frac{\varphi x \,.\, fu^3}{(u-x)^4}$ nach Potenzen von x gleich ist, welcher x^n zum Coefficienten hat, überall unter der Bedingung, dass man nur die Glieder nimmt, welche u im Nenner haben.

Nimmt man also alle diese verschiedenen Glieder zusammen, so erhält man folgenden Ausdruck des Gliedes $(n)\, x^n$ (506.) in der Entwickelung der gegebenen Gleichung $\frac{\varphi x}{u-x+fx} = L$ (504.) nach Potenzen von x, nämlich

Näherungs-Ausdrücke der

$$512.\ (n) = \frac{\varphi u}{u^{n+1}} + \frac{d\left(\frac{\varphi u \,.\, fu}{u^{n+1}}\right)}{du} + \frac{d^2\left(\frac{\varphi u \,.\, fu^2}{2u^{n+1}}\right)}{du^2} + \frac{d^3\left(\frac{\varphi u \,.\, fu^3}{2.3.u^{n+1}}\right)}{du^3} \ldots,$$

unter der Bedingung, dass nur die Glieder mit negativen Potenzen von u genommen werden.

193.

Es ist noch zu bemerken, dass sich, wenn man ferner die Ableitungen nach u nimmt, auch die Ausdrücke der Glieder mit x^n in den Entwickelungen von

$$513.\ \frac{\varphi x}{(u-x+fx)^2},\ \frac{\varphi x}{(u-x+fx)^3},\ \frac{\varphi x}{(u-x+fx)^4} \ldots$$

finden lassen [*weil z. B.* $\frac{d\left(\frac{\varphi x}{u-x+fx}\right)}{du} = \frac{\varphi x}{(u-x+fx)^2}$ *ist u. s. w.*]. Diese Glieder sind also

$$514.\ -\frac{d(n)}{du} . x^n,\ \frac{d^2(n)}{du^2} . \frac{x^n}{2},\ \frac{d^3(n)}{du^3} . \frac{x^n}{2.3} \ldots,$$

und um $\frac{d(n)}{du}$, $\frac{d^2(n)}{du^2}$ *etc.* zu finden, darf man nur in den Ausdruck von (n) (512.) rechterhand die Zeiger von d überall immer um Eins erhöhen.

194.

Angenommen also, man suchte das allgemeine Glied $(n)x^n$ der Reihe, welche die Entwickelung der rationalen Function

515.

Wurzeln der Gleichungen.

$$515. \quad \frac{P + Qx}{1 - 2x \cos\omega + x^2}$$

giebt, so dividire man zunächst, um diese Function auf die Form $\frac{\varphi x}{u - x + fx}$ zu bringen, durch $2 \cos\omega$, $\left[\text{welches } \frac{\frac{P}{2\cos\omega} + \frac{Q}{2\cos v}x}{\frac{1}{2\cos\omega} - x + \frac{x^2}{2\cos v}} \text{ giebt}\right]$; so ist hier, wenn man diesen Ausdruck vergleicht,

$$516. \begin{cases} \varphi x = \frac{P}{2\cos\omega} + \frac{Q}{2\cos\omega}x \\ fx = \frac{x^2}{2\cos\omega} \\ u = \frac{1}{2\cos\omega}. \end{cases}$$

Also ist in dem gegenwärtigen Falle

$$517. \begin{cases} \varphi u = \frac{P}{2\cos\omega} + \frac{Q}{2\cos\omega}u \\ fu = \frac{u^2}{2\cos\omega}, \ fu^2 = \frac{u^4}{(2\cos\omega)^2}, \ fu^3 = \frac{u^6}{(2\cos\omega)^3} \dots \end{cases}$$

folglich

$$518. \begin{cases} \frac{\varphi u}{u^{n+1}} = \frac{Pu^{-n-1}}{2\cos\omega} + \frac{Qu^{-n}}{2\cos\omega} \\ \frac{\varphi u \,.\, fu}{u^{n+1}} = \frac{Pu^{-n+1}}{(2\cos\omega)^2} + \frac{Qu^{-n+2}}{(2\cos\omega)^2} \\ \frac{\varphi u \,.\, fu^2}{u^{n+1}} = \frac{Pu^{-n+3}}{(2\cos\omega)^3} + \frac{Qu^{-n+4}}{(2\cos\omega)^3}. \end{cases}$$

Nimmt man hiervon die Ableitungen nach u, so erhält man

Näherungs-Ausdrücke der

519. $\begin{cases} \dfrac{d\left(\dfrac{\varphi u . fu}{u^{n+1}}\right)}{d\omega} = -\dfrac{(n-1)Pu^{-n}}{(2\cos\omega)^2} - \dfrac{(n-2)Qu^{-n+1}}{(2\cos\omega)^2} \\ \dfrac{d^2\left(\dfrac{\varphi u . fu}{u^{n+1}}\right)}{du^2} = \dfrac{(n-3)(n-2)Pu^{-n+1}}{2(2\cos\omega)^3} + \dfrac{(n-4)(n-3)Qu^{-n+2}}{2(2\cos\omega)^3} \end{cases}$

etc.,

folglich

520. $(n) =$

$$P\left(\frac{u^{-n+1}}{2\cos\omega} - \frac{(n-1)u^{-n}}{(2\cos\omega)^2} + \frac{(n-3)(n-2)u^{-n+1}}{2(2\cos\omega)^3} \ldots\right)$$

$$+Q\left(\frac{u^{-n}}{2\cos\omega} - \frac{(n-2)u^{-n+1}}{(2\cos\omega)^2} + \frac{(n-4)(n-3)u^{-n+2}}{2(2\cos\omega)^3} \ldots\right),$$

wo man nur noch statt ω seinen Werth $\frac{1}{2\cos\omega}$ (506.) setzen darf. Dieses giebt

521. $(n) =$

$$P\left((2\cos\omega)^n - (n-1)(2\cos\omega)^{n-2} + \frac{(n-3)(n-2)}{2}(2\cos\omega)^{n-4} - \frac{(n-5)(n-4)(n-3)}{2.3}(2\cos\omega)^{n-6} \ldots\right)$$

$$+Q\left((2\cos\omega)^{n-1} - (n-2)(2\cos\omega)^{n-3} + \frac{(n-4)(n-3)}{2}(2\cos\omega)^{n-5} - \frac{(n-6)(n-5)(n-4)}{2.3}(2\cos\omega)^{n-3} \ldots\right),$$

in welchem Ausdrucke die negativen Potenzen von ω nicht genommen werden dürfen [*weil nur negative Potenzen von* $u = \frac{1}{2\cos\omega}$ *genommen werden sollen*].

Wurzeln der Gleichungen.

Dieser Ausdruck kann noch vereinfacht werden, wenn man sich der bekannten Ausdrücke der Sinus vielfacher Winkel bedient, [*die aber, wie es auch hier nur erforderlich ist, nur für ganze positive n gelten. Man sehe deshalb den dritten Abschnitt der Abhandlung des Uebersetzers über Potenzen, Facultäten etc. Winkel-Functionen. Berlin bei Reimer* 1823.] Man erhält alsdann

$$522. \quad (n) = P\frac{\sin(n+1)\omega}{\sin\omega} + Q\frac{\sin n\omega}{\sin\omega},$$

ganz wie es Euler in der Einleitung zur Analysis findet. Der gegenwärtige Ausdruck aber hat den Vorzug, dass er auch leicht auf einen Bruch angewendet werden kann, dessen Nenner eine beliebige Potenz ist.

Da nämlich z. B. [*zu Folge* (*§.* 193.)] der Bruch

$$523. \quad \frac{P+Qx}{(1-2x\cos\omega+x^2)^2}$$

das allgemeine Glied $-\frac{d(n)}{du}.x^n$ hat, so erhält man, wenn man von (n) (520.) die erste Ableitung nach u nimmt,

$$524. \quad -\frac{d(n)}{du} = P\Big(\frac{(n+1)u^{-n-2}}{2\cos\omega} - \frac{(n-1)nu^{-n-1}}{(2\cos\omega)^2} + \frac{(n-3)(n-2)(u-1)u^{-n}}{2(2\cos\omega)^3} \ldots\Big)$$
$$+ Q\Big(\frac{nu^{-n-1}}{2\cos\omega} + \frac{(n-2)(n-1)u^{-n}}{(2\cos\omega)^2} + \frac{(n-4)(n-3)(n-2)u^{-n+1}}{2(2\cos\omega)^3} \ldots\Big),$$

Näherungs-Ausdrücke der

folglich, wenn man den Werth von $u = \frac{1}{2\cos\omega}$ setzt,

$$525.\quad -\frac{d(n)}{du} = P\Big((n+1)(2\cos\omega)^{n+1} - (n-1)n(2\cos\omega)^{n-1} + \frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{2}(2\cos\omega)^{n-3} \ldots\Big)$$
$$+ Q\Big(n(2\cos\omega)^{n} - (n-2)(n-1)(2\cos\omega)^{n-2} + \frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{2}(2\cos\omega)^{n-4} \ldots\Big),$$

wo überall nur die positiven Potenzen von $\cos\omega$ genommen werden müssen.

195.

Wir wollen nunmehr den allgemeinen Ausdruck des Coefficienten (n) der Potenz x^n in der Entwikkelung des Bruchs $\frac{\varphi x}{u - x + fx}$ (512.) wieder vornehmen und den Zähler desselben

$$526.\quad \varphi x = 1 - \frac{dfx}{dx},$$

oder allgemein

$$527.\quad \varphi x = \Psi x\left(1 - \frac{dfx}{dx}\right),$$

das heisst, gleich dem Producte der ersten Ableitung des Nenners [*nämlich der ersten Ableitung von* $u - x + fx$ *nach* x, *welche* $-1 + \frac{dfx}{dx}$ *ist*], negativ genommen, in irgend eine ganze und rationale Function Ψx von x setzen.

Setzt man, diesem zu Folge,

$$528.\quad \varphi u = \Psi u\left(1 - \frac{dfu}{du}\right)$$

Wurzeln der Gleichungen.

in (512.), so erhält man

$$529.\quad (n) = \frac{\Psi u}{u^{n+1}} - \frac{\Psi u \,.\, \frac{dfu}{du}}{u^{n+1}}$$

$$+ \frac{d\left(\frac{\Psi u \,.\, fu}{u^{n+1}}\right)}{du} - \frac{d\left(\frac{\Psi u \,.\, fu \frac{dfu}{du}}{u^{n+1}}\right)}{du}$$

$$+ \frac{d^2\left(\frac{\Psi u \,.\, fu^2}{2u^{n+1}}\right)}{du^2} - \frac{d^2\left(\frac{\Psi u \,.\, fu^2 \frac{dfu}{du}}{2u^{n+1}}\right)}{du^2}$$

.

Nun ist

$$\frac{d\left(\frac{\Psi u \,.\, fu}{u^{n+1}}\right)}{du} = \frac{\Psi u}{u^{n+1}} \,.\, \frac{dfu}{du} + \frac{d\left(\frac{\Psi u}{u^{n+1}}\right)}{du} fu,$$

$$\frac{d\left(\frac{\Psi u \,.\, fu^2}{2u^{n+1}}\right)}{du} = \frac{\Psi u}{u^{n+1}} fu \frac{dfu}{du} + \frac{d\left(\frac{\Psi u}{u^{n+1}}\right)}{du} \frac{fu^2}{2},$$

und folglich

$$\frac{d^2\left(\frac{\Psi u \,.\, fu^2}{2u^{n+1}}\right)}{du^2} = \frac{d\left(\frac{\Psi u}{u^{n+1}} fu \frac{dfu}{du}\right)}{du} + \frac{d\left(\frac{d\left(\frac{\Psi u}{u^{n+1}}\right)}{du} \frac{fu^2}{2}\right)}{du}$$

etc.

Reducirt man dieses und setzt, der Kürze wegen,

$$530.\quad \frac{\Psi u}{u^{n+1}} = V \; [fu = U],$$

so erhält man

Näherungs-Ausdrücke der

$$531.\ (n) = V + U\frac{dV}{du} + \frac{1}{2}\frac{d\left(U^2\frac{dV}{du}\right)}{du} + \frac{1}{2.3}\frac{d^2\left(U^3\frac{dV}{du}\right)}{du}\ldots$$

Dieser Ausdruck giebt also das allgemeine Glied $(n)\,x^n$ in der Entwickelung des Bruchs

$$\frac{\Psi x\left(1 - \frac{dfx}{dx}\right)}{u - x + fx}$$

nach Potenzen von x, unter der Bedingung, dass man nur die negativen Potenzen von u nimmt.

196.

.

Setzt man

$$532.\quad \Psi x = 1,\ \text{also}\ \Psi u = 1,\ \frac{\Psi u}{u^{n+1}} = V = u^{-n-1},$$

so erhält man das allgemeine Glied $(n)\,x^n$ der Entwickelung des Bruchs

$$533.\quad \frac{1 - \frac{dfx}{dx}}{u - x + fx}.$$

[*Dasselbe ist in diesem Falle, zu Folge* (531.),

$$534.\ (n) = \frac{1}{u^{n+1}} + U\frac{d(u^{-n-1})}{du} + \frac{1}{2}\frac{d\left(U^2\frac{d(u^{-n-1})}{du}\right)}{du}$$

$$+ \frac{1}{2.3}\frac{d\left(U^3\,\frac{d(u^{-n-1})}{du}\right)}{du}\ldots]$$

Wenn nun $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ die Wurzeln der Gleichung

$$535.\quad u - x + fx = 0$$

Wurzeln der Gleichungen.

sind, so ist, zu Folge (§. 124.), der Coefficient (n) des Gliedes mit x^n in der Entwickelung des Bruchs

$$\frac{1-\frac{dfx}{dx}}{u-x+fx},$$

$$536.\quad \left(\frac{1}{\alpha^{n+1}}+\frac{1}{\beta^{n+1}}+\frac{1}{\gamma^{n+1}}\ldots\right)x^n$$

[*denn nach (§. 124.) (313.) ist die Summe der $n+1$ten negativen Potenzen der Wurzeln des Nenners des daselbst entwickelten Bruches (296.), dessen Zähler, wie hier, der Ableitung des Nenners gleich ist, gleich dem Coefficienten des Gliedes mit x^n in der entwickelten Reihe (309.)*].

Setzt man also hier n statt $n+1$, so erhält man

$$537.\quad \frac{1}{\alpha^n}+\frac{1}{\beta^n}+\frac{1}{\gamma^n}\ldots$$

$$=u^{-n}+U\frac{d(u^{-n})}{du}+\frac{1}{2}\frac{d\left(U^2\frac{d(u^{-n})}{du}\right)}{du}+\frac{1}{2.3}\frac{d\left(U^3\frac{d(u^{-n})}{du}\right)}{du}\ldots$$

unter der Bedingung, dass man nur die negativen Potenzen von u nimmt.

197.

Es sey z. B. die Gleichung

$$538.\quad a-bx+cx^2=0$$

gegeben, mit den Wurzeln α und β.

Man dividire dieselbe durch b, um sie auf die Form $u-x+fx$ zu bringen, so erhält man

[$\frac{a}{b}-x+\frac{cx^2}{b}$, *folglich, mit $u-x+fx$ verglichen,*]

Näherungs-Ausdrücke der

539. $fx = \frac{cx^2}{b}$ und $u = \frac{a}{b}$.

Setzt man also in fx, u statt x, so ist

540. $fu = U = \frac{cu^2}{b}$,

also

541. $$\begin{cases} U\frac{d(u^{-n})}{du} = -\frac{ncu^{-n+1}}{b} \\ U^2\frac{d(u^{-n})}{du} = -\frac{nc^2u^{-n+3}}{b^2} \\ U^3\frac{d(u^{-n})}{du} = -\frac{nc^3u^{-n+5}}{b^3} \text{ etc.} \end{cases}$$

also auch (537.)

542. $$\frac{1}{\alpha^n}+\frac{1}{\beta^n} = u^{-n} - \frac{nc}{b}u^{-n+1} + \frac{n(n-3)}{2b^2}c^2u^{-n+2} - \frac{n(n-5)(n-4)}{2.3.b^2}u^{-n+3} \ldots,$$

wo nun noch $u = \frac{a}{b}$ zu setzen (539.), welches dann

543. $$\frac{1}{\alpha^n}+\frac{1}{\beta^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n - n\frac{c}{b}\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} + \frac{n(n-3)}{2}\left(\frac{c}{b}\right)^2\left(\frac{b}{a}\right)^{n-2} - \frac{n(n-5)(n-4)}{2.3}\left(\frac{c}{b}\right)^3\left(\frac{b}{a}\right)^{n-3} \ldots$$

giebt, welche Reihe so weit fortgesetzt werden muss als der Exponent von $\frac{b}{a}$ positiv ist.

Verlangte man die Summe der positiven Wurzeln der gegebenen Gleichung $\alpha^n + \beta^n$, so dürfte man nur die Gleichung

Wurzeln der Gleichungen.

544. $ax^2 - bx + c = 0$

nehmen, welche aus der vorigen (538.) entsteht, wenn man $\frac{1}{x}$ statt x setzt, und deren Wurzeln folglich $\frac{1}{\alpha}$ und $\frac{1}{\beta}$ sind. Man muss alsdann c statt a, und a statt c setzen, welches

545. $\alpha^n + \beta^n$

$$= \left(\frac{b}{c}\right)^n - n\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{c}\right)^{n-1} + \frac{n(n-3)}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{b}{c}\right)^{n-2}$$

$$- \frac{n(n-5)(n-4)}{2.3}\left(\frac{a}{b}\right)^3\left(\frac{b}{c}\right)^{n-3} \ldots$$

giebt.

198.

Wenn allgemein $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ die Wurzeln der Gleichung

546. $u - x + fx = 0$

sind, so ist

547. $u - x + fx = k\,(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots,$

wo k der Coefficient der höchsten Potenz von x in der gegebenen Gleichung ist. Nimmt man hier auf beiden Seiten die Ableitungen nach x, so erhält man

548. $$-1 + \frac{dfx}{dx} = k(x-\beta)(x-\gamma)\ldots$$
$$+ k(x-\alpha)(x-\gamma)\ldots$$
$$+ k(x-\alpha)(x-\beta)\ldots$$

.

Dividirt man also und verwechselt die Zeichen, so erhält man

Näherungs-Ausdrücke der

$$\frac{1-\frac{dfx}{dx}}{u-x+fx}=\frac{1}{\alpha-x}+\frac{1}{\beta-x}+\frac{1}{\gamma+x}\ldots,$$

und, wenn man mit Ψx multiplicirt,

$$549.\quad \frac{\Psi x\left(1-\frac{dfx}{dx}\right)}{u-x+fx}=\frac{\Psi x}{\alpha-x}+\frac{\Psi x}{\beta-x}+\frac{\Psi x}{\gamma-x}\ldots.$$

Da nun Ψx eine rationale Function von x seyn soll, so kann man sie durch $\alpha-x$ dividiren, bis man auf einen Rest ohne x kommt. Um diesen Rest sogleich zu finden, darf man nur erwägen, dass $\Psi\alpha-\Psi x$ nothwendig mit $\alpha-x$ aufgeht. Der Quotient wird eine rationale Function von x und α seyn, welche wir durch $F(x,\alpha)$ bezeichnen wollen, und da Ψx von der mten Ordnung ist, so ist offenbar $F(x,\alpha)$ von der $m-1$ten Ordnung. Da nun $\Psi\alpha-\Psi x=F(x,\alpha)(\alpha-x)$ ist, so ist

$$\Psi x=\Psi\alpha-F(x,\alpha)(\alpha-x),$$

folglich

$$\frac{\Psi x}{\alpha-x}=-F(x,\alpha)+\frac{\Psi\alpha}{\alpha-x}.$$

Eben so ist

$$\frac{\Psi x}{\beta-x}=-F(x,\beta)+\frac{\Psi\beta}{\beta-x}$$

u. s. w. Substituirt man dieses in (549.), so erhält man

$$550.\quad \frac{\Psi x\left(1-\frac{dfx}{dx}\right)}{u-x+fx}=-F(x,\alpha)-F(x,\beta)-F(x,\gamma)\ldots$$
$$+\frac{\Psi\alpha}{\alpha-x}+\frac{\Psi\beta}{\beta-x}+\frac{\Psi\gamma}{\gamma-x}\ldots.$$

Wurzeln der Gleichungen.

Löset man diese Brüche in Reihen auf, so erhält man, nach den $m-1$ ersten Gliedern, mit welchen sich die rationalen Theile von $F(x, \alpha)(x, \beta)\ldots$ vermischen, eine regelmässige Reihe, deren allgemeines Glied

$$551.\quad \left(\frac{\Psi\alpha}{\alpha^{n+1}} + \frac{\Psi\beta}{\beta^{n+1}} + \frac{\Psi\gamma}{\gamma^{n+1}}\ldots\right) x^n$$

ist, so dass, in so fern $n > m$ ist,

$$552.\quad (n) = \frac{\Psi\alpha}{\alpha^{n+1}} + \frac{\Psi\beta}{\beta^{n+1}} + \frac{\Psi\gamma}{\gamma^{n+1}}\ldots$$

Dieses ist das allgemeine Glied der rücklaufenden Reihe, welche man erhält, wenn man den Bruch $\dfrac{\Psi x\left(1-\dfrac{dfx}{dx}\right)}{u-x+fx}$ durch die Wurzeln der Gleichung $u-x+fx=0$ ausdrückt.

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem obigen allgemeinen Ausdruck von (n) (531.), so erhält man

$$553.\quad \frac{\Psi\alpha}{\alpha^n} + \frac{\Psi\beta}{\beta^n} + \frac{\Psi\gamma}{\gamma^n}\ldots =$$

$$V + U\frac{dV}{du} + \frac{1}{2}\frac{d\left(U^2\dfrac{dV}{du}\right)}{du} + \frac{1}{2.3}\frac{d^2\left(U^3\dfrac{dV}{du}\right)}{du^2}\ldots,$$

wo

$$V = \frac{\Psi u}{u^n}\quad (530.)$$

ist, und wo man nur die Glieder nehmen muss, welche Potenzen von u mit negativen Exponenten enthalten.

Näherungs-Ausdrücke der

199.

Wir wollen nun den Exponenten n unendlich gross annehmen, so dass das Glied der wiederkehrenden Reihe $(n)\,x^{n-1}$ unendlich weit vom Anfange der Reihe entfernt ist, so kann man annehmen, dass die Function $V = \frac{\Psi u}{u^n}$ (530.) und zugleich alle die Functionen $U.\frac{dV}{du}$, $U^2.\frac{dV}{du}$ gar keine andere als negative Potenzen von u mehr enthalten; wenigstens wird dieses um so strenger richtig seyn, je grösser n ist. In dieser Voraussetzung müssen alle Glieder des Ausdrucks von (n) (531.) beibehalten werden, und man kann annehmen, dass die Reihe

$$554.\quad V + U\frac{dV}{du} + \tfrac{1}{2}\frac{d\left(U^2\frac{dV}{du}\right)}{du} + \frac{d^2\left(U^3\frac{dV}{du}\right)}{du^2} \ldots.$$

ohne Ende fortlaufe.

200.

Hierbei ist zu bemerken, dass jede Reihe von dieser Form, wenn U und V beliebige Functionen von u sind, die merkwürdige Eigenschaft hat, dass, wenn man sie durch eine ähnliche Reihe multiplicirt, welche statt V irgend eine andere Function W von u enthält, das Product wiederum eine ähnliche Reihe ist, in welcher $V.W$ statt V steht.

Man multiplicire nämlich die beiden Reihen

Wurzeln der Gleichungen.

555. $$\begin{cases} V + U\dfrac{dV}{du} + \tfrac{1}{2}\dfrac{d\left(U^2\dfrac{dV}{du}\right)}{du} + \dfrac{1}{2.3}\dfrac{d^2\left(U^3\dfrac{dV}{du}\right)}{du^2}\dots \\ \text{und} \\ W + U\dfrac{dW}{du} + \tfrac{1}{2}\dfrac{d\left(U^2\dfrac{dW}{du}\right)}{du} + \dfrac{1}{2.3}\dfrac{d^2\left(U^3\dfrac{dW}{du}\right)}{du^2}\dots \end{cases}$$

mit einander, so erhält man

556. $$\begin{cases} V.W \\ + U\left(W\dfrac{dV}{du} + V\dfrac{dW}{du}\right) \\ + \tfrac{1}{2}V\dfrac{d\left(U^2\dfrac{dW}{du}\right)}{du} + U^2\dfrac{dV}{du}\dfrac{dW}{du} + \tfrac{1}{2}W\dfrac{d\left(U^2\dfrac{dV}{du}\right)}{du} \end{cases}$$

.

Nun ist

$$W\frac{dV}{du} + V\frac{dW}{du} = \frac{d(VW)}{du},$$

$$\frac{\tfrac{1}{2}d\left(U^2\dfrac{dW}{du}\right)}{du} = \tfrac{1}{2}U^2\frac{d^2W}{du^2} + \frac{dW}{du}.U\frac{dU}{du}$$

$$\frac{\tfrac{1}{2}d\left(U^2\dfrac{dV}{du}\right)}{du} = \tfrac{1}{2}U^2\frac{d^2V}{du^2} + \frac{dV}{du}.U\frac{dU}{du}$$

etc. Also ist das Product (556.)

$$\begin{aligned} & V.W \\ & + U\frac{d(VW)}{du} \\ & + \tfrac{1}{2}U^2\left(V\frac{d^2W}{du^2} + 2\frac{dV}{du}.\frac{dW}{du} + W\frac{d^2V}{du^2}\right) \\ & \qquad + \frac{d(VW)}{du}U\frac{dU}{du} \quad etc., \end{aligned}$$

Näherungs-Ausdrücke der

oder

$$557.\quad VW + U\frac{d(VW)}{du} + \tfrac{1}{2}\,\frac{d\left(U^2\frac{d(VW)}{du}\right)}{du^2} \ldots\ldots$$

Man findet ähnliche Glieder, wenn man die Multiplication weiter fortsetzt, und immer die Glieder zusammennimmt, welche einerlei Abmessungen von U enthalten.

Bezeichnet man also allgemein die erste Reihe (555.), welche nur V enthält, durch (V, U), die zweite Reihe (555.), welche W enthält, während U in beiden Reihen das Nämliche bleibt, durch (W, U) so ist

$$558.\quad (V, U) . (W, U) = (V . W, U),$$

woraus auch folgt

$$559.\quad (W, U) = \frac{(V . W, U)}{(V, U)},$$

so dass der Quotient zweier ähnlichen Reihen [*wie* (555.)], welche zwei verschiedene Functionen $V . W$ und V enthalten, ebenfalls eine ähnliche Function mit dem Quotienten W der beiden Functionen $V . W$ und V ist. [*Wegen der veränderten Zeichen weicht die Uebersetzung dieser Stelle etwas vom Originale ab.*]

201.

Nimmt man also zwei sehr grosse Zahlen n und $n + r$ an, deren Differenz r eine beliebige positive oder negative Zahl ist, so lässt sich der Quotient der beiden Grössen

Wurzeln der Gleichungen.

$$560. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Psi\alpha}{\alpha^n} + \frac{\Psi\beta}{\beta^n} + \frac{\Psi\gamma}{\gamma^n} \ldots \text{ und} \\ \frac{\Psi\alpha}{\alpha^{n+r}} + \frac{\Psi\beta}{\beta^{n+r}} + \frac{\Psi\gamma}{\gamma^{n+r}} \ldots \end{array} \right\} (535.)$$

durch die unendliche Reihe

$$561. \quad V + U\frac{dV}{du} + \tfrac{1}{2}\frac{d\left(U^2\frac{dV}{du}\right)}{du} \ldots \; (559.)$$

ausdrücken, wenn man die Grösse V dem Quotienten von $\frac{\Psi u}{u^n}$ durch $\frac{\Psi u}{u^{n+r}}$, also

$$562. \quad V = u^r$$

setzt. [*Es ist also, weil zugleich* $U = fu$ (530.)

$$563. \quad \frac{\frac{\Psi\alpha}{\alpha^n} + \frac{\Psi\beta}{\beta^n} + \frac{\Psi\gamma}{\gamma^n} \ldots}{\frac{\Psi\alpha}{\alpha^{n+r}} + \frac{\Psi\beta}{\beta^{n+r}} + \frac{\Psi\gamma}{\gamma^{n+r}} \ldots} =$$

$$u^r + fu\frac{d(u^r)}{du} + \tfrac{1}{2}\frac{d\left(fu^2\frac{d(u^r)}{du}\right)}{du} \ldots,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ *die Wurzeln der Gleichung* $u - x + fx = 0$ *sind.*]

Auf der andern Seite ist klar, dass sich die beiden Grössen (560.), wenn α die kleinste der Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ ist, für ein unendlich grosses n auf ihre beiden ersten Glieder $\frac{\Psi\alpha}{\alpha^n}$ und $\frac{\Psi\alpha}{\alpha^{n+r}}$ reduciren. [*Wenn die Wurzeln* $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ *sämmtlich reell sind und die durch* Ψ *bezeichneten Functionen von*

der Art sind, dass, wenn α *die kleinste unter den Grössen* $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ *ist, zugleich* $\Psi\alpha$ *kleiner ist, als alle die andern Grössen* $\Psi\beta, \Psi\gamma \ldots$, *ist solches unstreitig der Fall, weil alsdann die Grösse* $\frac{\Psi\alpha}{\alpha^n}$ *kleiner ist, als alle die Grössen* $\frac{\Psi\beta}{\beta^n}, \frac{\Psi\gamma}{\gamma^n} \ldots$, *und* $\frac{\Psi\alpha}{\alpha^{n+r}}$ *kleiner als die Grössen* $\frac{\Psi\beta}{\beta^{n+r}}, \frac{\Psi\gamma}{\gamma^{n+r}} \ldots$ *Ob indessen das Nämliche angenommen werden darf, wenn unter den Wurzeln* $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ *unmögliche Grössen sind, ist die Frage.*] Der Quotient der beiden Grössen (560.) ist also alsdann α^r und man erhält folgenden merkwürdigen Lehrsatz.

Wenn α die kleinste Wurzel der Gleichung

$$u - x + fx = 0$$

ist, so ist

$$564. \quad \alpha^r = u^r + fu \frac{d(u^r)}{du} + \frac{1}{2} \frac{d\left(fu^2 \frac{d(u^r)}{du}\right)}{du} + \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{d^2\left(fu^3 \frac{d(u^r)}{du}\right)}{du^2} \ldots,$$

wo r eine beliebige positive oder negative Grösse seyn kann.

Man findet also auf diese Weise nicht allein die Wurzel α, sondern auch eine beliebige Potenz dieser Wurzel.

202.

Setzt man also $r = -n$, wo n eine beliebige endliche Zahl ist [*welches*

Wurzeln der Gleichungen.

565. $$\alpha^{-n} = u^{-n} + fu\frac{d(u^{-n})}{du} + \frac{1}{2}\frac{d\left(fu^2\frac{d(u^{-n})}{du}\right)}{du} + \frac{1}{2\cdot 3}\frac{d^2\left(fu^3\frac{d(u^{-n})}{du}\right)}{du^2}\ldots\ldots$$

giebt], und vergleicht diesen Ausdruck mit demjenigen von

$$\frac{1}{\alpha^n} + \frac{1}{\beta^n} + \frac{1}{\gamma^n}\ldots\ldots\ (537.),$$

so erhält man folgenden sonderbaren Satz:

Wenn man in dem Ausdrucke

566. $$u^{-n} + fu\frac{d(u^{-n})}{du} + \frac{1}{2}\frac{d\left(fu^2\frac{d(u^{-n})}{du}\right)}{du} + \frac{1}{2\cdot 3}\frac{d^2\left(fu^3\frac{d(u^{-n})}{du}\right)}{du^2}\ldots\ldots$$

nur die Glieder nimmt, welche Potenzen von u mit negativen Exponenten enthalten, so giebt derselbe den Werth der Summe der $-n$ten Potenzen aller Wurzeln α, β, γ.... Nimmt man dagegen alle Glieder ohne Ausnahme, so erhält man die $-n$te Potenz der kleinsten Wurzel.

[*Bei diesem Satze scheinen die unmöglichen Wurzeln, wie in (§. 201.), Schwierigkeiten zu machen.*]

Näherungs-Ausdrücke der

203.

In (§. 197.) fanden wir für die Wurzeln α und β der Gleichung $cx^2 - bx + a = 0$ den Ausdruck

$$\frac{1}{\alpha^n} + \frac{1}{\beta^n} =$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n - n\left(\frac{c}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} + \frac{n(n-3)}{2}\left(\frac{c}{b}\right)^2\left(\frac{b}{a}\right)^{n-2}$$

$$- \frac{n(n-5)(n-4)}{2 \cdot 3}\left(\frac{c}{b}\right)^3\left(\frac{b}{a}\right)^{n-3} \ldots (543.)$$

unter der Bedingung, dass man die Reihe nicht weiter fortsetzt, als sie positive Potenzen von $\frac{b}{a}$ enthält. Setzt man dagegen dieselbe ins Unendliche fort, so giebt sie das einzige Glied $\frac{1}{\alpha^n}$, wenn α die kleinste von den beiden Wurzeln α und β ist. Der Exponent n kann nach Belieben positiv und negativ seyn.

Die beiden Wurzeln der Gleichung $cx^2 - bx + a = 0$ sind α und β, diejenigen der Gleichung $ax^2 - bx + c = 0$, $\frac{1}{\alpha}$ und $\frac{1}{\beta}$, und es ist

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a},$$

wo α die kleinste der beiden Wurzeln ist. Also ist die Reihe

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n - n\left(\frac{c}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} + \frac{n(n-3)}{2}\left(\frac{c}{b}\right)^2\left(\frac{b}{a}\right)^{n-2} \ldots,$$

wenn man bei den positiven Potenzen von $\frac{b}{a}$, das heisst bei den negativen Potenzen von a stehen bleibt, dem Werthe von

Wurzeln der Gleichungen.

$$\frac{(b+\sqrt{(b^2-4ac)})^n+(b-\sqrt{(b^2-4ac)})^n}{(2a)^n}$$

gleich, wo n eine beliebige ganze Zahl ist. Setzt man dagegen die Reihe bis ins Unendliche fort, so giebt sie den Werth von

$$\left(\frac{b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}\right)^n,$$

wo n eine beliebige positive oder negative Zahl ist.

Der erste Theil dieses Satzes ist leicht nachzuweisen, wenn man die nte Potenz wirklich entwikkelt, weil die Wurzel-Grösse $\sqrt{(b^2-4ac)}$ sich überall aufhebt. Auch ist dieser Theil des Satzes schon durch den Moivreschen Lehrsatz bekannt.

Um den andern Theil zu zeigen, muss man die Wurzelgrösse selbst in eine Reihe auflösen. Setzt man also z. B. $n=1$, so giebt die Reihe

$$\frac{b}{a}-\frac{c}{b}-\frac{2ac^2}{2b^3}-\frac{3.4.a^2c}{2.3b^5}\ldots,$$

welches sich auf

$$\frac{b}{2a}+\frac{b}{2a}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2c}{b}-\frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{8ac^2}{b^3}-\frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{32a^2c^3}{b^5}-\ldots$$

bringen lässt, und diese Reihe ist offenbar gleich $\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$. [*Wenn die Reihe divergirt, lässt sich daraus nichts schliessen.*]

204.

Wenn die unbestimmte Gleichung

567. $a-bx+cx^2-dx^3+ex^4-fx^5\ldots=0$

Näherungs-Ausdrücke der

gegeben ist, so setze man in den allgemeinen Ausdruck des obigen Lehrsatzes (§. 201.)

$$568.\quad fu = \frac{cu^2 - du^3 + eu^4 - fu^5 \ldots\ldots}{b}.$$

Alsdann ist

$$569.\quad \begin{cases} fu^2 = \dfrac{c^2u^4 - 2cdu^5 + (d^2 + 2ce)u^6 \ldots\ldots}{b^2} \\ fu^3 = \dfrac{c^3u^6 - 3cdu^7 \ldots\ldots}{b^3} \\ fu^4 = \dfrac{c^4u^8 \ldots\ldots}{b^4}. \end{cases}$$

Nun ist

$$\frac{d(u^r)}{du} = ru^{r-1},$$

also

$$570.\quad \begin{cases} fu\dfrac{d(u^r)}{du} = r.\dfrac{cu^{r+1} - du^{r+2} + eu^{r+3} - fu^{r+4} \ldots\ldots}{b} \\ fu^2\dfrac{d(u^r)}{du} = r.\dfrac{c^2u^{r+3} - 2cdu^{r+4} + (d^2+2e)u^{r+5} \ldots}{b^2} \\ fu^3\dfrac{d(u^r)}{du} = r.\dfrac{c^3u^{r+5} - 3cdu^{r+6} \ldots\ldots}{b^3} \\ fu^4\dfrac{d(u^r)}{du} = r.\dfrac{c^4u^{r+7} \ldots\ldots}{b^4}. \end{cases}$$

Nimmt man die Ableitungen und substituirt sie in den Ausdruck (564.), so erhält man, nachdem $\frac{a}{b}$ statt u, und x statt α gesetzt worden,

Wurzeln der Gleichungen.

571. $x^r = \frac{a^r}{b^{r^2}}$

$$+ r\left(\frac{a^{r+1}c}{b^{r+2}} - \frac{a^{r+2}d}{b^{r+3}} + \frac{a^{r+3}e}{b^{r+4}} - \frac{a^{r+4}f}{b^{r+5}} \ldots\right)$$

$$+ \frac{r^2}{2}\left(\frac{(r+3)a^{r+3}c^2}{b^{r+4}} - \frac{(r+4)a^{r+3}2cd}{b^{r+5}} + \frac{(r+5)a^{r+4}(a^2+2ce)}{b^{r+6}} \ldots\right.$$

$$+ \frac{r^3}{2.3}\left(\frac{(r+5)(r+4)a^{r+3}c^3}{b^{r+6}} - \frac{(r+6)(r+5)a^{r+4}.3cd}{b^{r+7}} \ldots\right.$$

$$+ \frac{r^4}{2.3.4}\left(\frac{(r+7)(r+6)(r+5)a^{r+4}c^4}{b^{r+8}} \ldots\right).$$

205.

Wenn $r = 1$, so ist

572. $x = \frac{a}{b} + \frac{a^2c}{b^3} - \frac{a^3d}{b^4} + \frac{a^4e}{b^5} - \frac{a^5f}{b^6} \ldots$

$$+ \frac{2a^3c^2}{b^5} - \frac{5a^4cd}{b^6} + \frac{3a^5(d^2+2ce)}{b^7} \ldots$$

$$+ \frac{5a^4c}{b^7} - \frac{21a^5cd}{b^8} \ldots$$

$$+ \frac{14a^5c^4}{b^9} \ldots$$

Dieses ist die bekannte Newtonsche Formel für die Umkehrung der Reihen, welche sonst nur durch die Methode der unbestimmten Coefficienten gefunden wird. Die obige Rechnung, indem sie zugleich das Gesetz der Reihe und das Mittel, sie so weit fortzusetzen als man will, angiebt, zeigt, dass der Werth von x, welchen sie ausdrückt, die kleinste Wurzel der Gleichung (567.) ist.

Näherungs-Ausdrücke der

206.

Will man den Ausdruck (572.) zur Berechnung des Werths von p aus der Gleichung

$$\alpha + p\,d\alpha + \tfrac{1}{2}p^2\,d^2\alpha + \frac{1}{2.3}p^3\,d^3\alpha \ldots = 0 \quad (488.)$$

[*wo* $\alpha = Fa$], welche Gleichung wir in (§. 188.) untersuchten, anwenden, so darf man nur α statt a, $-d\alpha$ statt b, $\tfrac{1}{2}d^2\alpha$ statt c, $-\frac{1}{2.3}d^3\alpha$ statt d *etc.*, und p statt x setzen. Dieses giebt

$$573.\ p = -\frac{\alpha}{d\alpha} + \frac{\alpha^2\,d^2\alpha}{2\,d\alpha^3} - \frac{\alpha^3\,d^3\alpha}{2.3\,d\alpha^4} + \frac{\alpha^3\,d^2\alpha^2}{2\,d\alpha^5} \ldots,$$

welches die nämliche Reihe (491. 492.) ist, die wir in (§. §. 188 und 189.) auf zwei verschiedene Arten fanden.

Der obige Ausdruck (571.) lässt sich noch allgemeiner machen. Da nämlich α einer der Werthe von x ist, so kann man den Satz, wie folgt, entwickeln.

207.

Die Gleichung

$$574.\ x = u + fx$$

giebt allgemein [*zu Folge* (564.)]

$$575.\ x^r = u^r + fu\frac{d(u^r)}{du} + \frac{d\left(fu^2\,\frac{d(u^r)}{du}\right)}{du} + \frac{d^2\left(fu^3\,\frac{d(u^r)}{du}\right)}{du^2} \ldots;$$

Wurzeln der Gleichungen.

Nun sey Fx eine beliebige gegebene Function von x, so kann man dieselbe allemal auf die Form

576. $$Fx = Mx^r + Nx^s + Px^t \ldots.$$

bringen. Man darf also nur die Werthe von x^r, x^s, $x^t \ldots.$ [*nach* (575.) *ausgedrückt*] mit M, N, P *etc.* multipliciren und die Producte zusammenziehen, so erhält man einen Ausdruck, in welchem, statt u^r, $Mu^r + Nu^s + Pu^t \ldots.$, das heisst, Fu und folglich auch $\frac{dFu}{du}$ statt $\frac{d(u^r)}{du}$ steht. Hieraus erhält man folgenden, wegen seiner Allgemeinheit und Einfachheit merkwürdigen Lehrsatz:

Wenn

577. $$x = u + fx$$

ist, so ist

578. $$Fx = Fu + fu\frac{dFu}{du} + \frac{1}{2}\frac{d\left(fu\frac{dFu}{du}\right)}{du} + \frac{1}{2\cdot 3}\frac{d^2\left(fu^2\frac{dFu}{du}\right)}{du^2} \ldots.,$$

wo die Gestalt der durch f und F bezeichneten Functionen ganz beliebig ist.

Der Lehrsatz ist, so entwickelt, von den Wurzeln der Gleichung unabhängig und blos ein Resultat der Umformung der Functionen, welches man durch die allmählige Elimination von x oder u finden kann. Ich habe zuerst diesen Satz in den Memoiren der Berliner Academie vom Jahre 1768 gegeben. Ich war darauf durch eine der obigen ähnliche, aber we-

niger strenge Untersuchung gekommen. Mehrere Analysten haben seitdem den Beweis des Satzes a posteriori durch die Entwickelung der Functionen zu geben gesucht. Aber Laplace hat in den Memoiren der Academie der Wissenschaften zu Paris einen eleganten und directen Beweis desselben durch die Differential-Rechnung gegeben, welchen ich in die Theorie der Functionen in dem ersten Abschnitte (§. 86. 87.) aufnahm.

[*Man sehe den ersten Band dieser Werke S. 272. Der Satz ist daselbst noch etwas allgemeiner ausgedrückt. Es wird nicht blos, wie hier,* $x = u + fx$, *sondern* $x = u + yfx$ *vorausgesetzt, so dass hier nur von dem besondern Falle die Rede ist, wenn* $y = 1$. *Er kann aber noch allgemeiner gemacht, und auch noch einfacher entwikkelt werden, wie man in der Anmerkung zu I. (§. 87.) der Theorie der Functionen, Erster Band S. 277 etc. sahe. Dann fällt auch die hier oben (§. 201.) bemerkte Schwierigkeit weg, die aus den unmöglichen Wurzeln entsteht. Hier ist diese Schwierigkeit für das Resultat, wie es scheint, nicht gleichgültig, und wenn man, wie hier, vom Besondern zum Allgemeinen übergeht, macht man den Satz doch wohl von der Theorie der Gleichungs-Wurzeln abhängig, und bringt dann die Schwierigkeit der unmöglichen Wurzeln hinein, ohne dass solches gerade nöthig wäre. Der Fall giebt wieder ein Beispiel von dem Nachtheile des Ganges vom Besondern zum Allgemeinen. Der*

Wurzeln der Gleichungen.

Ausdruck von x^r, *wie er in* (§. 201.) *gefunden wurde, ist wegen der unmöglichen Wurzeln zweifelhaft, und dennoch ist der allgemeine Satz* (578.) *der hier in* (§. 207.) *aus jenem abgeleitet wird, richtig. Der Satz ist also* a l l g e m e i n *richtig, und im* b e s o n d e r n *Falle zweifelhaft. Dieses ist auch kein Widerspruch, weil häufig allgemeine Sätze in besondern Fällen, wenn auch nicht unrichtige, so doch unverständliche, gewöhnlich divergirende Ausdrücke geben. Sehr misslich ist es aber vollends, gerade von* s o l c h e n *unbestimmten besondern Fällen allgemeine Ausdrücke abzuleiten. Die allgemeinen Sätze behalten in solchen Fällen, die man mit Unrecht Ausnahme-Fälle nennt, nichts weiter als ihre Form bei, während sie übrigens unbrauchbar sind. Es ist also beinahe Zufall, wenn man bei der Untersuchung der besondern Fälle die richtige Form trifft. Auch hier ist der Ausdruck* (564.) *unstreitig, sobald unmögliche Wurzeln vorkommen, ein divergirender Ausdruck.*]

Zu bemerken ist, dass man in $x = u + fx$ auch u gleich Null setzen kann, welches

$$x = fx$$

giebt, welches ebenfalls eine beliebige Gleichung mit x ausdrückt. Man erhält also auch den Werth von Fx, wenn man den Ausdruck (570.) $u = 0$ setzt, nachdem die Functionen entwickelt worden, welches viel einfacher ist. [*Indessen kann doch auch durch*

Näherungs-Ausdrücke der

die Beibehaltung von u vielleicht zuweilen die Divergenz des Ausdrucks vermieden werden.]

208.

Ehe ich diesen Zusatz schliesse, will ich noch zeigen, wie das Verfahren von (§. 189.), die Gleichung $F(a+p)=0$ näherungsweise aufzulösen, auf die gleichzeitige Auflösung mehrerer Gleichungen zwischen mehreren unbekannten Grössen angewendet werden kann.

Angenommen, es wären zwei Gleichungen zwischen zwei unbekannten Grössen x und y gegeben, z. B. die Gleichungen

579. $Fxy=0$ und $fxy=0$,

auch kenne man schon zwei, den Grössen x und y nahe kommende Zahlen a und b, so dass, wenn man

580. $x=a+p$ und $y=b+q$

setzt, die Zahlen p und q sehr klein sind, so kommt es darauf an, aus den beiden Gleichungen

581. $F(a+p,\ b+q)=0$ und $f(a+p,\ b+q)=0$

die Grössen p und q zu finden.

Nach Newtons Verfahren müsste man die beiden Functionen in Reihen entwickeln, welches Gleichungen von der Form

582. $$\begin{cases} F(a,b)+Mp+Nq\ldots=0 \text{ und} \\ f(a,b)+mq+nq\ldots=0 \end{cases}$$

giebt, woraus, als erste Annäherung,

Wurzeln der Gleichungen.

583. $$\begin{cases} p = \dfrac{Nf(a,b) - nF(a,b)}{Mn - Nm} \\ q = \dfrac{Mf(a,b) - mF(a,b)}{Nm - Mn} \end{cases}$$

giebt. Da nun a und b zuerst x und y nahe kommen, so nähern sich $a+p$ und $b+q$ den Grössen x und y noch mehr, und man kann sie statt a und b in die Functionen p und q (583.) setzen. Bezeichnet man durch $p_,$ und $q_,$ diese neuen Werthe von p und q, so kommen $a+p+p_,$ und $b+q+q_,$ den Grössen x und y noch näher u. s. w.

Dieses Verfahren hat Thomas Simpson in seinem Versuche über mehrere mathematische Gegenstände gezeigt, und es ist für die arithmetische Berechnung bequem. Aber es würden sich dadurch Ausdrücke von x und y nach Potenzen der Grössen $F(a,b)$ und $f(a,b)$ geordnet, welche die Abweichungen der anfänglichen Annahme zeigen, nicht wohl finden lassen, und am wenigsten das Gesetz dieser Reihen. Dieses kann man, wie folgt, finden.

Man betrachte die Grössen a und b als beliebige Functionen zweier andern Grössen α und β, so dass, wenn α und β in $\alpha+\varkappa$ und $\beta+\varepsilon$ übergehen, aus den Grössen a und b, $a+p$ und $b+q$ wird. Auch nehme man an, dass die Grössen α und β von der Art sind, dass

584. $F(a,b) = \alpha$ und $f(a,b) = \beta$,

welches, wenn man $\alpha+\varkappa$ und $\beta+\varepsilon$ statt α und β setzt,

585. $F(a+p, b+q) = \alpha+\varkappa$, $f(a+p, b+q) = \beta+\varepsilon$

Näherungs-Ausdrücke der

giebt, so dass die gegebenen Gleichungen alsdann

586. $\alpha + \varkappa$ und $\beta + \varepsilon = 0$

sind, woraus

587. $\varkappa = -\alpha = -F(a, b)$ und $\varepsilon = -\beta = -f(a, b)$

folgt.

Nun erhält man, wenn man in a und b, $\alpha + \varkappa$ und $\beta + \varepsilon$ statt α und β setzt,

$$588. \left\{ \begin{aligned} [x = a + p =]\ & a + \varkappa \frac{da}{d\alpha} + \frac{\varkappa^2}{2} \frac{d^2 a}{d\alpha^2} \ldots \\ & + \varepsilon \frac{da}{d\beta} + \varkappa\varepsilon \frac{d^2 a}{d\alpha\, d\beta} \ldots \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{d^2 a}{d\beta^2} \ldots \\ [y = b + q =]\ & b + \varkappa \frac{db}{d\alpha} + \frac{\varkappa^2}{2} \frac{d^2 b}{d\alpha^2} \ldots \\ & + \varepsilon \frac{db}{d\beta} + \varkappa\varepsilon \frac{d^2 b}{d\alpha\, d\beta} \ldots \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{d^2 b}{d\beta^2} \ldots, \end{aligned} \right.$$

worin man statt der Grössen $\varkappa$ und ε ihre Werthe $-F(a, b)$ und $-f(a, b)$ (587.) und statt $\frac{da}{d\alpha}$, $\frac{db}{d\beta}$ *etc.* die aus den Gleichungen $F(a, b) = \alpha$ und $f(a, b) = \beta$ (584.) genommenen Werthe setzen muss.

Es ist

589. $\frac{d\alpha}{d\alpha} = 1$, $\frac{d\alpha}{d\beta} = 0$, $\frac{d\beta}{d\alpha} = 0$, $\frac{d\beta}{d\beta} = 1$

und

Wurzeln der Gleichungen.

$$590.\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\alpha} &= \frac{d\alpha}{da}\frac{da}{d\alpha} + \frac{d\alpha}{db}\frac{db}{d\alpha} = 1 \\ \frac{d\alpha}{d\beta} &= \frac{d\alpha}{da}\frac{da}{d\beta} + \frac{d\alpha}{db}\frac{db}{d\beta} = 0 \\ \frac{d\beta}{d\alpha} &= \frac{d\beta}{da}\frac{da}{d\alpha} + \frac{d\beta}{db}\frac{db}{d\alpha} = 0 \\ \frac{d\beta}{d\beta} &= \frac{d\beta}{da}\frac{da}{d\beta} + \frac{d\beta}{db}\frac{db}{d\beta} = 1 \end{aligned}\right\} (589.)$$

aus welchen Gleichungen sich die Werthe der vier Grössen $\frac{da}{d\alpha}$, $\frac{da}{d\beta}$, $\frac{db}{d\alpha}$ und $\frac{db}{d\beta}$ für (588.) in $\frac{d\alpha}{da}$, $\frac{d\alpha}{db}$, $\frac{d\beta}{da}$, $\frac{d\beta}{db}$ finden lassen, welche letztere Grössen unmittelbar aus (584.) genommen werden können.

Nimmt man darauf weiter die Ableitungen nach α und β, so findet man auch die Grössen $\frac{d^2a}{d\alpha^2}$, $\frac{d^2a}{d\alpha\, d\beta}$, $\frac{d^2b}{d\alpha^2}$ *etc.* u. s. w.

Wenn man, der Kürze wegen,

$$591.\quad \frac{d\alpha}{da}\cdot\frac{d\beta}{db} - \frac{d\alpha}{db}\cdot\frac{d\beta}{da} = P$$

setzt, so findet man aus (590.)

$$592.\quad \frac{da}{d\alpha} = \frac{d\beta}{db} : P,\ \frac{da}{d\beta} = -\frac{d\alpha}{db} : P,\ \frac{db}{d\alpha} = -\frac{d\beta}{da} : P,$$

$$\frac{db}{d\beta} = \frac{d\alpha}{da} : P,$$

welches

Näherungs-Ausdrücke u. s. w.

$$593. \begin{cases} p = -\dfrac{\alpha \dfrac{d\beta}{db} + \beta \dfrac{d\alpha}{db}}{P} \\ q = \dfrac{\alpha \dfrac{d\beta}{da} - \beta \dfrac{d\alpha}{da}}{P} \end{cases}$$

giebt.

Diese Ausdrücke von p und q kommen mit den obigen (583.) überein, aber sie geben besser das Gesetz der Reihen.

[*Wegen der veränderten Zeichen ist die Uebersetzung dieses Paragraphs nicht wörtlich.*]

Zwölfter Zusatz.

Ueber die Verwandlung gegebener Gleichungen in solche, deren Glieder, bis auf das gegebene Glied, alle das nämliche Zeichen haben.

209.

Ich sagte in der Einleitung, dass die Auflösungen numerischer Gleichungen von Vieta und Harriot nur auf solche Gleichungen mit Sicherheit anwendbar sind, deren Glieder bis auf das gegebene Glied alle einerlei Zeichen haben, und dass man jede Gleichung auf diese Form bringen kann, so bald man so nahe liegende Grenzen einer ihrer Wurzeln kennt, dass alle andere reelle Wurzeln und der reelle Theil der imaginairen Wurzeln ausserhalb dieser Grenzen fallen. Da ich nicht weiss, ob diese Verwandlung bekannt ist, so theile ich sie für Diejenigen mit, welche sich der älteren Methoden mit Erfolg zu bedienen wünschen.

210.

Die beiden gegebenen oder auf irgend eine Weise bekannten Grenzen einer Wurzel mögen a und b

Wegschaffung der

seyn. a soll kleiner, b grösser als die Wurzel seyn. Hat man die unbekannte Grösse der Gleichung durch x bezeichnet, so setze man

$$594.\quad x = \frac{a + by}{1 + y}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck und reducirt die Gleichung, so wird man eine Gleichung in y finden, welche vom nämlichen Grade ist, wie die gegebene Gleichung und die verlangte Eigenschaft hat, in so fern nur a der Wurzel nahe genug kommt.

Die Wurzeln der gegebenen Gleichung in x mögen α, β, γ.... und α mag diejenige Wurzel seyn, welche zwischen den Grenzen a und b liegt. Aus $x = \frac{a + by}{1 + y}$ folgt [$x + xy = a + by$, *also*]

$$595.\quad y = \frac{x - a}{b - x},$$

folglich sind die Wurzeln der neuen Gleichung in y

$$596.\quad \frac{\alpha - a}{b - \alpha}, \frac{\beta - a}{b - \beta}, \frac{\gamma - a}{b - \gamma} \text{ etc.}$$

Nun ist nach der Voraussetzung $\alpha > a < b$, also $\alpha - a > 0$ und $b - \alpha > 0$, also ist die Wurzel $\frac{\alpha - a}{b - \alpha}$ positiv und um so kleiner, je kleiner die Differenz zwischen den Grenzen und der Wurzel α ist.

Da ferner die andern Wurzeln β, γ.... ausserhalb der Grenzen a und b fallen sollen, so ist, wenn $\beta < a$, nothwendig $\beta < b$ [*weil* $b > a$], also $\beta - a < 0$ und

und $b - \beta > 0$, folglich die Wurzel $\frac{\beta - a}{b - \beta}$ nothwendig negativ. Wäre dagegen $\beta > b$, so wäre $\beta > a$ [*weil* $b > a$], folglich $\beta - a > 0$ und $b - \beta < 0$, also wäre $\frac{\beta - a}{b - \beta}$ ebenfalls negativ. Die Wurzel $\frac{\beta - a}{b - \beta}$ wäre also immer negativ.

Eben so verhält es sich mit allen übrigen Wurzeln, wie z. B. mit der Wurzel $\frac{\gamma - a}{b - \gamma}$, welche einer reellen Wurzel γ der Gleichung mit x entspricht.

Nun mögen aber β und γ unmögliche Wurzeln seyn. In diesem Falle sind sie nothwendig von der Form

$$\beta = \varrho + \sigma\sqrt{-1}$$
$$\gamma = \varrho - \sigma\sqrt{-1},$$

wo ϱ und σ reelle Grössen sind. [*Neunter Zusatz.*] In diesem Falle also ist

597. $$\frac{b - a}{b - \beta} = \frac{\varrho - a + \sigma\sqrt{-1}}{b - \varrho - \sigma\sqrt{-1}}.$$

Man multiplicire oben und unten mit $b - \varrho + \sigma\sqrt{-1}$, so erhält man

598. $$\frac{(\varrho - a)(b - \varrho) - \sigma^2 + (b - a)\sigma\sqrt{-1}}{(b - \varrho)^2 + \sigma^2}.$$

Nun fällt angenommenermaassen der reelle Theil ϱ der Wurzeln β und γ ausserhalb der Grenzen a und b. Ist also $\varrho < a$, so ist auch $\varrho < b$ [*weil* $b > a$], folglich $\varrho - a < 0$ und $b - \varrho > 0$, also $(\varrho - a)(b - \varrho) < 0$. Wäre $\varrho > b$, so wäre auch $\varrho > a$ [*weil* $b > a$] also $\varrho - a > 0$, $b - \varrho < 0$, und folglich $(\varrho - a)(b - \varrho) < 0$.

Wegschaffung der

Also ist die Grösse $(\varrho - a)(b - \varrho)$ immer negativ.

Da nun σ^2 und $(b - \varrho)^2$ immer positiv sind [*als Quadrate*], so hat die Wurzel $\frac{\beta - a}{a - \beta}$ in diesem Falle [*zu Folge* (598.)] die Form

$$-P + Q\sqrt{-1},$$

wo P und Q reelle Grössen sind, und P positiv ist. Eben so ist, wenn man $\gamma = \varrho - \sigma\sqrt{-1}$ setzt, die Wurzel $\frac{\gamma - a}{b - \gamma}$ von der Form

$$-P - Q\sqrt{-1}$$

u. s. w. für die andern imaginairen Wurzeln.

Bedeuten also p, q, r.... und P, Q, R.... positive Grössen, so entstehen aus den reellen Wurzeln der Gleichung in x für die transformirte Gleichung mit y die reellen Wurzeln p, $-q$, $-r$...., und aus den imaginairen Wurzeln der Gleichung in x für die transformirte Gleichung die Wurzeln $-P+Q\sqrt{-1}$, $-P-Q\sqrt{-1}$, $-R+S\sqrt{-1}$, $-R-S\sqrt{-1}$ *etc.* Die transformirte Gleichung hat also die Factoren

599. $$\begin{cases} y-p,\ y+q,\ y+r \ldots. \\ y+P-Q\sqrt{-1},\ y+P+Q\sqrt{-1},\ y+R-S\sqrt{-1}, \\ \qquad y+R+S\sqrt{-1} \ldots. \end{cases}$$

Nun geben aber die beiden imaginairen Factoren $y + P - Q\sqrt{-1}$ und $y + P - Q\sqrt{-1}$ den reellen Factor zweiter Ordnung $y^2 + 2Py + P^2 + Q^2$ u. s. w., also ist die Gleichung in y folgende:

600. $(y-p)(y+q)(y+r)\ldots.$
$\times (y^2+2Py+P^2+Q^2)(y^2+2Ry+R^2+S^2)\ldots. = 0$

Zeichenwechsel.

211.

Wir wollen nun das Product aller dieser Factoren untersuchen, den ersten $y - p$ ausgenommen. Da alle Glieder der Factoren positiv sind, so ist klar, dass ihr Product, nach y geordnet, nur positive Glieder haben kann. Dasselbe wird also von der Form

$$601. \quad y^{m-1} + Ay^{m-2} + By^{m-3} \ldots . + K$$

seyn, wo die Coefficienten A, B, $C \ldots . K$ sämmtlich positive Grössen sind, ohne dass irgend eine derselben Null seyn könnte. [*Denn Null kann nur ein Coefficient dann seyn, wenn er negative Theile hat, die sich mit den positiven aufheben.*] Multiplicirt man dieses Polynom noch mit $y - p$, so erhält man

$$602. \quad y^m + (A - p)y^{m-1} + (B - Ap)y^{m-2} + (C - Bp)y^{m-3} \ldots . - Kp = 0,$$

welches die transformirte Gleichung in y ist.

Wie man sieht, ist in derselben das letzte Glied $-Kp$ negativ, die übrigen Glieder aber werden positiv seyn, in so fern

$$A > p, \; B > Ap, \; C > Bp \; etc.$$

ist. Da nun dadurch, dass sich die Grenze a der Wurzel α immer mehr nähert, der Werth von $p = \frac{\alpha - a}{b - \beta}$ so klein werden kann als man will, so ist klar, dass man a immer so annehmen kann, dass $p < A, < \frac{B}{A}, < \frac{C}{B}$ *etc.* ist, so dass also alle Coef-

Wegschaffung der

ficienten der Grösse (602.), bis auf den letzten, positiv sind.

Man darf nicht fürchten, dass, wenn man den Werth von p verkleinert, die Werthe von q, r.... P, Q.... ebenfalls abnehmen, so dass sie mit p zugleich verschwinden. Denn setzt man $a = \alpha$, welches $p = 0$ giebt, so ist q oder $\frac{\beta - a}{b - \beta} = -\frac{\beta - \alpha}{b - \beta}$ und P und Q oder $-\frac{(\varrho - a)(b - \varrho) - \sigma^2}{(b - \varrho)^2 + \sigma^2}$ und $\frac{(b - a)\sigma}{(b - \varrho)^2 + \sigma^2}$ sind $= \frac{(\varrho - \alpha)(b - \varrho) - \sigma^2}{(b - \varrho)^2 + \sigma^2}$ und $\frac{(b - \alpha)\sigma}{(b - \varrho)^2 + \sigma}$ [*welches nicht nothwendig Null ist*] u. s. w.

Man erhält also, wenn man

$$x = \frac{a + by}{1 + y}$$

setzt, zuverlässig eine transformirte Gleichung in y, welche die verlangte Bedingung erfüllt, in so fern nur die kleinere Grenze a nahe genug bei ihrer Wurzel liegt, welches sich immer finden lässt, wenn man allmählig für α grössere Werthe versucht.

212.

In (§. 27.) sahen wir, dass die Gleichung

$$x^2 - 7x + 7 = 0$$

drei Wurzeln hat, zwei positive und eine negative, und dass sich die beiden positiven Wurzeln durch continuirliche Brüche ausdrücken lassen, deren Glieder 1, 1, 2, 4.... und 1, 2, 1, 4.... sind, welches für die beiden Wurzeln die convergirenden Brüche

Zeichenwechsel.

$\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{22}{13} \ldots$ und

$\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{19}{14} \ldots$

giebt. Man sieht leicht, dass 1 und 2 zwei Grenzen der ersten Wurzel sind. Da aber die zweite Wurzel zwischen 1 und $\frac{3}{2}$ liegt, so liegt sie zwischen den nämlichen Grenzen. Man nehme also die folgenden Grenzen 2 und $\frac{5}{3}$ und setze $a = \frac{5}{3}$, $b = 2$ und folglich $x = \frac{\frac{5}{3} + 2y}{1 + y} = \frac{5 + 6y}{1 + y}$. Da nun die Vielfachen von y nichts in dem Zeichen der Gleichung ändern, so kann man blos $x = \frac{5 + 2y}{3 + y}$, nämlich y, statt $3y$ setzen. Dieses giebt die transformirte Gleichung

$$y^3 + 4y^2 + 3y - 1 = 0,$$

welche, wie man sieht, die gegebene Bedingung erfüllt.

Nimmt man für die andere Wurzel die Grenzen $\frac{3}{2}$ und $\frac{4}{3}$ an, indem man $a = \frac{4}{3}$ und $b = \frac{3}{2}$ setzt, so erhält man, wenn man $x = \frac{\frac{4}{3} + \frac{3}{2}y}{1 + y} = \frac{8 + 9y}{6(1 + y)}$, oder auch blos y statt $3y$ setzt, $x = \frac{8 + 3y}{6 + 2y}$, welches die transformirte Gleichung

$$y^3 + 8y^2 + 4y - 8 = 0$$

giebt, die ebenfalls die verlangte Form hat.

Die angenommenen Grenzen gaben unmittelbar die gesuchten transformirten Gleichungen. Hätte man aber z. B. für die erste Wurzel die Grenzen 2 und $\frac{3}{2}$ angenommen, welche ebenfalls die Eigenschaft ha-

Wegschaffung der

ben, dass keine andere Wurzel zwischen ihnen liegt, weil keine andere reelle Wurzel kleiner als $\frac{3}{2}$ ist, so wäre $a = \frac{3}{2}$, $b = 2$, welches $x = \frac{\frac{3}{2} + 2y}{1 + y} = \frac{3 + 4y}{2(1+y)}$, oder wenn man y statt $2y$ setzt, $x = \frac{3 + 2y}{2 + y}$ und die transformirte Gleichung

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$$

giebt, welche die verlangte Eigenschaft noch nicht hat, weil die positive Wurzel zu gross war.

Ohne indessen eine neue Substitution nach geschehener Vergrösserung des Werths von a zu machen, ist es genug, wenn man alle Wurzeln um irgend eine Grösse k vermindert, also z. B. $y = z + k$ setzt, und hierauf durch Proben einen Werth von k sucht, der den vorgeschriebenen Bedingungen genug thut. Dieses giebt folgende transformirte Gleichung

$$z^3 + (3k + 1)z^2 + (3k^2 + 2k - 2)z + k^3 + k^2 - 2k - 1 = 0,$$

wo man nur k positiv und so annehmen darf, dass $3k^2 + 2k > 2$ und $k^3 + k^2 < 2k + 1$ ist. Man sieht sehr bald, dass $k = 1$ diese Bedingungen erfüllt, und man findet die transformirte Gleichung

$$z^3 + 4z^2 + 3z - 1 = 0,$$

welche die verlangten Eigenschaften hat.

213.

Wir fanden in der dritten Abtheilung des fünften Abschnitts (§. 72.), dass, wenn $\frac{\pi}{\pi_{,}}$ und $\frac{\varrho}{\varrho_{,}}$ zwei Brüche sind, die sich einer der Wurzeln der Glei-

Zeichenwechsel.

chung mit x nähern, dass man dann die transformirte Gleichung mit t, welche dienen soll, den folgenden Bruch zu finden, unmittelbar findet, wenn man in die gegebene Gleichung

$$603.\quad x = \frac{\varrho t + \pi}{\varrho_{,} t + \pi_{,}}\ (194.)$$

setzt. Es sey

$$604.\quad t = \frac{\varrho}{\varrho_{,}} y,$$

so erhält man

$$605.\quad x = \frac{\frac{\varrho \pi_{,} y}{\varrho_{,}} + \pi}{\pi_{,}(y + 1)} = \frac{\frac{\varrho}{\varrho_{,}} y + \frac{\pi}{\pi_{,}}}{y + 1}.$$

Dieser Ausdruck ist, wie man sieht, dem obigen (594.) gleich, wenn man $\frac{\pi}{\pi_{,}}$ und $\frac{\varrho}{\varrho_{,}}$ für die beiden Grenzen nimmt, welche daselbst durch a und b bezeichnet wurden.

Da nun aber zwei auf einander folgende Brüche selbst wechselsweise grössere und kleinere Grenzen der gesuchten Wurzel sind, die einander immer näher kommen, so folgt, dass die transformirten Gleichungen mit Brüchen, die kleiner sind als die Wurzel, den verlangten Bedingungen immer näher kommen. Die zwischenliegenden transformirten Gleichungen aber werden die nämliche Eigenschaft haben, wenn man $\frac{1}{y}$ statt y setzt, denn wenn $\frac{\pi}{\pi_{,}} > \frac{\varrho}{\varrho_{,}}$, so ist, wenn man substituirt,

$$606.\quad x = \frac{\frac{\pi}{\pi_{,}} y + \frac{\varrho}{\varrho_{,}}}{y + 1}.$$

Wegschaffung der

Der Unterschied zwischen den beiden Brüchen $\frac{\pi}{\pi_{,}}$ und $\frac{\varrho}{\varrho_{,}}$ ist $\frac{1}{\pi_{,}\varrho_{,}}$. Ist dieser Unterschied kleiner geworden als die kleinste Differenz zwischen den Wurzeln der gegebenen Gleichung, d. h. kleiner als die Grenze $\frac{l}{L}$ (vierter Zusatz), so kann zwischen diese Brüche nur noch eine Wurzel fallen. Von den reellen Theilen der imaginairen Wurzeln kann man sich aber nicht so leicht a priori versichern, dass sie ausserhalb jener Brüche fallen, wenn man nicht erst die Gleichungen aufstellt, deren Wurzeln $\alpha - \frac{\beta+\gamma}{2}$ sind, und hernach eine Grenze sucht, die kleiner ist als jede dieser Wurzeln, um sie mit der Differenz $\frac{1}{\pi_{,}\varrho_{,}}$ zu vergleichen.

Uebrigens ist es, obgleich aufeinander folgende Brüche Grenzen geben, welche, während die Wurzel zwischen ihnen liegt, einander immer näher rücken, dennoch möglich, dass die transformirte Gleichung niemals die verlangte Eigenschaft habe, weil die positiven Wurzeln, während die beiden Grenzen zugleich zusammenrücken, zunehmen können, statt abzunehmen. Ist man aber zu Brüchen gelangt, zwischen welchen nur eine reelle Wurzel und kein reeller Theil der imaginairen Wurzeln liegt, so darf man nur alle Wurzeln der zugehörigen transformirten Gleichung um irgend eine Grösse vermindern, die man, wie wir oben sahen, durch Proben finden kann.

Zeichenwechsel.

Wenn eine Gleichung auf die verlangte Gestalt, in welcher alle Glieder, das letzte ganz gegebene ausgenommen, einerlei Zeichen haben, gebracht ist, so bringe man dieses letzte Glied auf die andere Seite. Alsdann kann man, ungefähr wie bei Gleichungen mit zwei Gliedern, die Wurzel ausziehen. Es sind blos, wegen der verschiedenen Potenzen der unbekannten Grösse, mehr Versuche nöthig.

Hätte man z. B. die Gleichung des dritten Grades

$$y^3 + Ay^2 + By - N = 0,$$

wo A, B und N positiv angenommen werden, so bringe man diese Gleichung auf die Form

$$y^3 + Ay^2 + By = N.$$

Hier muss man nun, statt aus N blos die Cubic-Wurzel auszuziehen, die Wurzel aus der Summe der Potenzen $y^3 + Ay^2 + By$ nehmen, und wenn a der schon gefundene Theil der Wurzel, p der Rest ist, so erhält man

$$(3a^2 + 2Aa + B)p + (3a + A)p^2 + p^3 = N - a^3 - Aa^2 - Ba$$

und folglich

$$p < \frac{N - a(a^2 + Aa + B)}{3a^2 + 2Aa + B},$$

welcher Ausdruck demjenigen $p < \frac{N - a^3}{3a^2}$, auf welchem die Ausziehung der Cubic-Wurzel beruht, ähnlich ist.

Für die oben gefundene Gleichung

$$y^3 + 4y^2 + 3y - 1 = 0$$

Wegschaffung d. Zeichenw.

ist dieser Ausdruck

$$p < \frac{1 - a(a^2 + 4a + 3)}{3a^2 + 8a + 3}.$$

Die erste Ziffer des Werths von a kann, wie leicht zu sehen, nur 0,2 seyn. Setzt man also $a = 0{,}2$, so findet man $p < \frac{0{,}232}{4{,}72} > 0{,}05$. Setzt man $p = 0{,}04$, so ist der neue Werth von a, 0,24 und man findet $p < \frac{0{,}0368}{5{,}093} < 0{,}008$ *etc.*

Dreizehnter Zusatz.

Ueber die algebraische Auflösung der Gleichungen.

214.

Die Auflösung der Gleichungen vom zweiten Grade findet man schon beim Diophantes, auch kann man sie aus einigen Sätzen der data des Euclides ableiten; wie es scheint haben sie aber die ältesten italiänischen Algebraisten von den Arabern gelernt. Sie löseten hierauf auch die Gleichungen dritten und vierten Grades auf; aber alle Bemühungen, Gleichungen höherer Grade aufzulösen, bleiben bis jetzt ohne Erfolg. Man fand bei den Versuchen neue Methoden für den dritten und vierten Grad, aber nichts für die höhern Grade, ausgenommen etwa für einzelne Arten von Gleichungen, wie z. B. die reciproken, deren Ordnungs-Zahl immer auf die Hälfte reducirt werden kann, oder Gleichungen, deren Wurzeln denen von Gleichungen des dritten Grades ähnlich sind, dergleichen Moivre zuerst bemerkte, und einige andere mehr.

Ueber die algebraische Auflösung

215.

In den Memoiren der Berliner Academie von den Jahren 1770 und 1771 untersuchte und verglich ich die verschiedenen bekannten Verfahren, algebraische Gleichungen aufzulösen, und fand, dass sich alle diese Methoden im Wesentlichen auf die Anwendung einer Hülfs-Gleichung reduciren, die man auflösende (resolvante) nennt und deren Wurzeln von der Form

607. $x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \alpha^3 x_4 \ldots$

sind, wenn die gegebenen Wurzeln der Gleichung durch x, x_1, $x_2 \ldots$ bezeichnet werden und α eine der [*unmöglichen*] Wurzeln der Einheit von der nämlichen Ordnung ist, wie die gegebene Gleichung.

Von dieser allgemeinen Form der Wurzeln ausgehend, suchte ich a priori die Grade der auflösenden Gleichung und ihre Divisoren. Auch wies ich nach, warum diese Gleichung, welche immer von einer höhern Ordnung ist als die gegebene Gleichung, für Gleichungen des dritten und vierten Grades reduciret werden und zur Auflösung dieser Gleichungen dienen kann.

Ich glaube, dass eine kurze Darstellung dieser Theorie in der gegenwärtigen Abhandlung an ihrem Orte ist, nicht allein, weil daraus ein gleichförmiges Verfahren zur Auflösung der vier ersten Grade folgt, sondern auch, weil das Verfahren auf Gleichungen mit zwei Gliedern von beliebiger Ordnung mit Nutzen angewendet werden kann.

der Gleichungen.

216.

Wir wollen die gegebene Gleichung allgemein durch

608. $[z =] x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} \ldots = 0$

und ihre m Wurzeln durch x_1, x_2, $x_3 \ldots x_m$ bezeichnen, so ist, vermöge der bekannten Eigenschaften der Gleichungen,

$$609. \begin{cases} A = x_1 + x_2 + x_3 \ldots + x_m \\ B = x_1 x_2 + x_1 x_3 \ldots + x_2 x_3 \ldots \\ C = x_1 x_2 x_3 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Dem obigen zu Folge, setzen wir nun, wenn t die unbekannte Grösse in der auflösenden Gleichung ist,

610. $t = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \alpha^3 x_4 \ldots + \alpha^{m-1} x_m$,

wo α eine der [*unmöglichen*] mten Wurzeln von 1 ist, das heisst, eine der Wurzeln der Gleichung mit zwei Gliedern

$$611.\ y^m - 1 = 0.$$

Um also die Gleichung in t zu finden, muss man die m unbekannten Grössen x_1, x_2, $x_3 \ldots$ mittelst der Gleichungen (609. und 610.) deren Zahl auch m ist, [*letzteres, weil die Gleichung* (611.), *auch m Wurzeln und also* α, *m verschiedene Werthe hat*] eliminiren. Dieses Verfahren würde aber weitläufige Rechnungen erfordern und noch den Mangel haben, dass man zuletzt eine Gleichung erhält, die auf einen höhern Grad steigt, als nöthig ist.

Ueber die algebraische Auflösung

217.

Man kann die gesuchte Gleichung in t viel leichter finden, wenn man wiederum das Verfahren anwendet, von welchem wir schon häufig Gebrauch machten, nämlich sogleich die Form aller Wurzeln der gesuchten Gleichung aufzustellen und dann die Gleichung aus ihren Wurzeln zusammenzusetzen.

Zunächst ist klar, dass man in den Ausdruck von t die Wurzeln x_1, x_2, x_3.... unter sich nach Belieben verwechseln kann, weil sich eine von der andern durch nichts unterscheidet. Daraus folgt, dass man die verschiedenen Werthe von t unmittelbar erhält, wenn man [*in* (610.)] die Wurzeln x_1, x_2, x_3.... auf alle mögliche Weise unter einander verwechselt. Die Resultate dieser Verwechselung sind nothwendig die Wurzeln der reducirten Gleichung in t, welche gefunden werden soll.

Nun ist aus der Theorie der Combinationen bekannt, dass die Zahl der Permutationen von m Dingen im Allgemeinen dem Producte $1 . 2 . 3 m$ gleich ist. Die Gleichung in t wird also im Allgemeinen so viele Wurzeln haben, als dieses Product Einheiten hat, und folglich von dem Grade $1 . 2 . 3 m$ seyn. Es wird sich aber zeigen, dass der Grad dieser Gleichung durch die Form der Wurzeln selbst noch erniedrigt werden kann.

Da diese Form von der Grösse α abhängt, welche eine der Wurzeln der Gleichung $y^m - 1 = 0$ seyn soll, so wollen wir einige Bemerkungen über

der Gleichungen.

die Eigenschaften der Wurzeln dieser Gleichung voraus schicken. Hierbei wollen wir die Fälle unterscheiden, wenn m eine Primzahl, und wenn m eine zusammengesetzte Zahl ist.

218.

Man setze zuerst, m sey eine Primzahl. In diesem Falle haben nothwendig alle Potenzen von α bis zu α^m verschiedene Werthe, in so fern man nicht den Werth 1 von α nimmt. Denn wären zwei Potenzen α^n und α^ν einander gleich, so wäre $\alpha^n = \alpha^\nu$, und folglich $\alpha^{n-\nu} = 1$. Keine Potenz von α, deren Exponent kleiner ist als m, kann aber $= 1$ seyn, so lange nicht $\alpha = 1$ ist. Denn weil $\alpha^m - 1 = 0$ ist, so müssten, wenn zugleich $\alpha^n - 1 = 0$ wäre, während $n < m$ ist, die beiden Gleichungen $\alpha^m - 1 = 0$ und $\alpha^n - 1 = 0$ eine gemeinschaftliche Wurzel haben. Sucht man durch das gewöhnliche Verfahren den grössten Divisor der beiden Grössen $\alpha^m - 1$ und $\alpha^n - 1$, so findet man nothwendig $\alpha - 1$, weil m eine Primzahl ist, so dass also die gemeinschaftliche Wurzel der beiden Gleichungen $\alpha^m - 1 = 0$ und $\alpha^n - 1 = 0$ nur 1 seyn kann. [*Dieser Satz lässt sich auch vermittelst der Ausdrücke der Wurzeln von 1 durch imaginaire Grössen und Winkel-Functionen nachweisen.*]

219.

Daraus folgt: Erstlich, dass die Potenzen α, α^2, $\alpha^3 \ldots \alpha^m$ sämmtlich Wurzeln der Gleichung

$y^m - 1 = 0$ sind, wenn man α irgend einer Wurzel dieser Gleichung, ausser derjenigen die 1 ist, gleich setzt. Denn da $\alpha^m = 1$, so ist auch $\alpha^{2m} = 1$, $\alpha^{3m} = 1$ *etc.*, so dass die Potenzen $\alpha, \alpha^2, \alpha^3 \ldots . \alpha^m$ auch Wurzeln der nämlichen Gleichung sind. Und da ihrer m sind, alle von verschiedenen Werthen, so sind sie nothwendig alle Wurzeln der Gleichung $y^m - 1 = 0$.

220.

Es folgt: Zweitens, dass, wenn man in die Reihe der Potenzen $\alpha, \alpha^2, \alpha^3 \ldots . \alpha^{m-1}$ statt α irgend eine dieser Potenzen setzt, z. B. α^n, wo $n < m$, dass dann die neue Reihe $\alpha^n, \alpha^{2n}, \alpha^{3n} \ldots .$, wenn man alle Exponenten unter m erniedrigt, welches angeht, weil $\alpha^m = 1$ ist, wiederum die nämlichen Potenzen enthalten wird, aber in anderer Ordnung. Denn da alle die Exponenten $n, 2n, 3n \ldots .$ verschieden sind, so sind es ihre Reste nach der Division mit m [*nämlich nach der wiederholten Subtraction von m*] ebenfalls, weil m eine Primzahl ist, so dass die Reste, weil ihrer m sind und jeder vom andern verschieden ist, nur die Zahlen 1, 2, 3 bis m seyn können.

221.

Wir wollen ferner den Fall untersuchen, wenn m eine zusammengesetzte Zahl ist. In diesem Falle hat die Gleichung $y^n - 1 = 0$, wenn n ein Divisor von m ist, alle ihre Wurzeln mit der Gleichung $y^m - 1 = 0$ gemein, weil, wenn man die

Wurzel

der Gleichungen.

Wurzel der Gleichung $y^n - 1 = 0$ gleich r setzt, $r^n = 1$, und folglich $r^m = 1$ ist, so dass r auch eine Wurzel der Gleichung $y^m - 1 = 0$ ist. Setzt man also $r = \alpha$, so ist $\alpha^m = 1$, und wenn $m = np$, so wiederholt sich offenbar in der Reihe der Potenzen α, α^2, $\alpha^3 \ldots . \alpha^m$, jede p mal. Mithin können dann diese Potenzen nicht mehr alle Wurzeln der Gleichung $y^m - 1 = 0$ ausdrücken, indem die Gleichung keine gleiche Wurzeln haben kann.

222.

Es sey $m = pq$, wo p und q zwei Primzahlen sind, und β eine der Wurzeln der Gleichung $y^p - 1 = 0$, γ eine Wurzel der Gleichung $y^q - 1 = 0$ ist, so ist klar, dass β und γ auch Wurzeln der Gleichung $y^m - 1 = 0$ sind, weil wegen $\beta^p = 1$ und $\gamma^q = 1$ auch $\beta^{pq} = 1$ und $\gamma^{pq} = 1$ ist. Alle Wurzeln der Gleichung $y^m = 0$ können aber nicht durch die auf einander folgenden Potenzen der Wurzeln β und γ ausgedrückt werden.

Man sieht auch, dass das Product $\beta\gamma$ eine Wurzel der nämlichen Gleichung $y^m - 1 = 0$ ist; aber keine Potenz dieser Wurzel, deren Exponent kleiner als m ist, kann der Einheit gleich seyn, wenn nicht β oder $\gamma = 1$ ist. Denn sonst müsste der Exponent dieser Potenz ein Divisor von m, und folglich gleich p oder q seyn, so dass $(\beta\gamma)^p = 1$ oder $(\beta\gamma)^q = 1$. Im ersten Falle wäre $\gamma^p = 1$, weil nach der Voraussetzung $\beta^p = 1$ ist; und da nun nach der Voraussez-

zung schon $\gamma^p - 1 = 0$ ist, so wäre $\gamma - 1 = 0$, weil p und q unter einander Primzahlen sind. Im zweiten Fall wäre $\beta - 1 = 0$.

223.

So lange also β und γ nicht 1 sind, hat die Wurzel $\beta\gamma$ der Gleichung $y^m - 1 = 0$, wenn $m = pq$ ist, die nämliche Eigenschaft, wie die Wurzel α, wenn m eine Primzahl ist, nämlich, dass alle Wurzeln der Gleichung, der Reihe nach, durch die Potenzen von $\beta\gamma$ ausgedrückt werden können.

224.

Da die Zahl der Werthe von β, p, und die Zahl der Werthe von γ, q ist, so ist die Zahl der Werthe von $\beta\gamma$, gleich pq, das heisst m; und es ist leicht zu zeigen, dass alle diese Werthe unter einander verschieden sind, weil sie durch $\beta^r\gamma^s$ ausgedrückt werden können, wenn man der Reihe nach $r = 1, 2, 3 \ldots. p$ und $s = 1, 2, 3 \ldots. q$ setzt, indem p und q Primzahlen seyn sollen. Daraus folgt, dass alle Wurzeln der Gleichung $y^m - 1 = 0$, wenn $m = pq$ ist, durch die Producte $\beta\gamma$ der Wurzeln der Gleichungen $y^p - 1 = 0$ und $y^q - 1 = 0$ ausgedrückt werden können, wo p und q Primzahlen sind.

Eben so lässt sich zeigen, dass, wenn $m = pqr$ und p, q, r Primzahlen, β, γ, δ aber beliebige Wurzeln der drei Gleichungen $y^p - 1 = 0$, $y^q - 1 = 0$, $y^r - 1 = 0$ sind, dass dann das Product $\beta\gamma\delta$, wenn

der Gleichungen.

man der Reihe nach β, γ, δ alle ihre Werthe giebt, alle Wurzeln der Gleichung $y^m - 1 = 0$ bezeichnen kann, und dass diejenigen von diesen Wurzeln, welche durch $\beta\gamma\delta$ ausgedrückt werden, wenn man von den Werthen von β, γ, δ, die Einheit ausnimmt, die nämlichen Eigenschaften haben, wie die Wurzeln der Gleichung $y^m - 1 = 0$, wenn m eine Primzahl ist. Und so weiter.

225.

Wäre dagegen $m = p^2$, wo p eine Primzahl ist, so ist klar, dass, wenn man für β irgend eine Wurzel der Gleichung $y^p - 1 = 0$ nimmt, β auch eine Wurzel der Gleichung $y^m - 1 = 0$ seyn wird, und $\sqrt[p]{\beta}$ auch. Man würde also in diesem Falle für γ irgend einen der Werthe von $\sqrt[p]{\beta}$ nehmen, und ebenfalls den Ausdruck $\beta\gamma$ für alle Wurzeln der Gleichung $y^m - 1 = 0$ erhalten.

Eben so, wenn $m = p^3$ wäre, so würde man die Werthe von β und γ beibehalten und ausserdem $\delta = \sqrt[p^2]{\beta}$ setzen. Dieses würde $\beta\gamma\delta$ für den Ausdruck aller Wurzeln der Gleichung $y^m - 1 = 0$ geben, wenn man, der Reihe nach, für β, γ, δ alle ihre Werthe setzt. Und so weiter.

226.

Allgemein also, wenn $m = p^\mu q^\nu r^\pi \ldots$ und β, γ, $\delta \ldots$ beliebige Wurzeln der Gleichungen $y^p - 1 = 0$, $y^q - 1 = 0$, $y^r - 1 = 0 \ldots$, p, q, $r \ldots$ aber Prim-

Ueber die algebraische Auflösung

zahlen sind, so erhält man, wenn man $\beta_1 = \sqrt[p]{\beta}$, $\beta_2 = \sqrt[p]{\beta_1}$ *etc.*, $\gamma_1 = \sqrt[q]{\gamma}$, $\gamma_2 = \sqrt[q]{\gamma_1}$ *etc.*, $\delta_1 = \sqrt[r]{\delta}$, $\delta_2 = \sqrt[r]{\delta_1}$ *etc.* setzt, für den allgemeinen Ausdruck der Wurzeln der Gleichung $y^m - 1 = 0$ das Product

611. $\beta\beta_1\beta_2 \ldots\ldots \gamma\gamma_1\gamma_2 \ldots\ldots \delta\delta_1\delta_2 \ldots\ldots,$

wo man den Grössen $\beta, \beta_1 \ldots\ldots, \gamma, \gamma_1 \ldots\ldots, \delta, \delta_1 \ldots\ldots$ alle die Werthe geben muss, welche diese Grössen einzeln bekommen können.

Hieraus folgt, dass man, um die Wurzeln der Gleichung mit zwei Gliedern $y^m - 1 = 0$ zu finden, wenn m keine Primzahl ist, nur ähnliche Gleichungen auflösen darf, deren Ordnungszahlen diejenigen Primzahlen sind, aus welchen m zusammengesetzt ist.

227.

Endlich ist zu bemerken, dass, da in der Gleichung

$$y^m - 1 = 0$$

alle Zwischenglieder fehlen, vermöge der Ausdrücke im Anfange des sechsten Zusatzes (§. 120.), wenn man die Wurzeln der Gleichung $1, \alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots$ nennt,

$$612. \begin{cases} 1 + \alpha + \beta + \gamma + \delta \ldots\ldots = 0 \\ 1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \ldots\ldots = 0 \\ 1 + \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 \ldots\ldots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1 + \alpha^{m-1} + \beta^{m-1} + \gamma^{m-1} + \delta^{m-1} \ldots\ldots = 0; \end{cases}$$

der Gleichungen.

hierauf aber, wegen $\alpha^m = 1$, $\beta^m = 1$, $\gamma^m = 1$ etc.

$$1 + \alpha^m + \beta^m + \gamma^m \ldots\ldots = m$$

612. $$1 + \alpha^{m+1} + \beta^{m+1} + \gamma^{m+1} \ldots\ldots = 0$$

$$1 + \alpha^{m+2} + \beta^{m+2} + \gamma^{m+2} \ldots\ldots = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ist u. s. w.

Diese verschiedenen Bemerkungen werden uns in der Folge nützlich seyn.

228.

Dieses vorausgeschickt, wollen wir nun die Function (610.)

614. $$t = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \alpha^3 x_4 \ldots\ldots + \alpha^{m-1} x_m$$

nehmen, in welcher $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_m$ die m Wurzeln der gegebenen Gleichung vom m ten Grade (608.) sind, α aber eine beliebige [*unmögliche*] Wurzel der Gleichung $y^m - 1 = 0$ ist, so dass $\alpha^m = 1$.

Man sieht zunächst, dass dieser Ausdruck eine unveränderliche Function der Grössen $\alpha^0 x_1$, $\alpha^1 x_2$, $\alpha^2 x_3$ etc. [*oder eine symmetrische Grösse, die sich durch Verwechselung der Grössen, von welchen sie abhängt, nicht verändert*], dass also das Resultat der Verwechselung der Wurzeln $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots$ unter sich das nämliche ist, als wenn man die Potenzen der Wurzeln α mit einander vertauscht.

229.

Daraus folgt, dass man αt erhält, wenn man in t (614.) x_1 mit x_2, x_2 mit $x_3 \ldots\ldots$, x_m mit x ver-

Ueber die algebraische Auflösung

wechselt, weil $\alpha^m = 1$. Eben so erhält man $\alpha^2 t$, wenn man x_1 mit x_3, x_2 mit $x_4 \ldots$, x_{m-1} mit x_1 und x_m mit x_2 verwechselt, weil $\alpha^m = 1$ und $\alpha^{m+1} = \alpha$ u. s. w. [*Wenn man nämlich t (in 614.) der Reihe nach mit* α, α^2, $\alpha^3 \ldots$ *multiplicirt, so erhält man*

$$\alpha t = \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha^3 x_3 \ldots + \alpha x_m$$
$$\alpha^2 t = \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha^3 x_3 \ldots + \alpha_{m-1} + \alpha x \ldots$$

u. s. w., welches die Resultate der benannten Verwechselungen sind.] Wenn also t eine der Wurzeln der auflösenden Gleichung in t ist, so sind αt, $\alpha^2 t$, $\alpha^3 t \ldots \alpha^{m-1} t$ die übrigen Wurzeln. Die Gleichung in t muss also von der Art seyn, dass sie sich nicht ändert, wenn man der Reihe nach αt, $\alpha^2 t$, $\alpha^3 t \ldots$ statt t setzt, woraus folgt, dass die Gleichung keine andere als solche Potenzen von t enthalten kann, deren Exponenten Vielfache von m sind [*weil nur* $\alpha^m t = t$, $\alpha^{2m} t = t$, $\alpha^{3m} t = t$ *etc.*].

Setzt man also

$$615. \quad t^m = \tau,$$

so erhält man eine Gleichung in τ, welche nur vom $1, 2, 3 \ldots m-1$ten Grade ist, und deren Wurzeln die verschiedenen Werthe von τ sind, welche entstehen, wenn man die $m-1$ Wurzeln x_1, x_2, $x_3 \ldots x_m$ unter sich verwechselt. [*Die Gleichung in t war vom* $1, 2, 3 \ldots m$*ten Grade (§. 217.); die Gleichung in* τ *ist nur vom* $1, 2, 3 \ldots m-1$*ten Grade, weil* $\tau = t^m$.]

der Gleichungen.

230.

Der Ausdruck von τ wird, weil $\alpha^m = 1$, $\alpha^{2m} = 1$ *etc.* ist, von der Form

616. $\tau = \lambda_0 + \alpha\lambda_1 + \alpha^2\lambda_2 + \alpha^3\lambda_3 \ldots + \alpha^{m-1}\lambda_{m-1}$

seyn, wo λ_0, λ_1, $\lambda_2 \ldots$ bestimmte Functionen von x_1, x_2, $x_3 \ldots$ sind, welche im Allgemeinen die Eigenschaft haben, sich nicht zu verändern, wenn man x_2 statt x_1, x_3 statt $x_2 \ldots$, x_1 statt x_m, oder x_3 statt x, x_4 statt $x_1 \ldots$, x_1 statt x_{m-1} u. s. w. setzt, indem τ eben so wohl gleich $(\alpha t)^m$, $= (\alpha^2 t)^m$ *etc.* als gleich t^m ist. [*Der Ausdruck von τ wird nämlich, weil $\tau = t^m$ ist, eine ähnliche Form haben, wie der Ausdruck von t* (610.), *nämlich eine Form, die in Beziehung auf die Potenzen von α nur lineär ist.*]

Hat man die Grössen λ_0, λ_1, $\lambda_2 \ldots$ gefunden, so erhält man sogleich die Wurzeln x_1, x_2, $x_3 \ldots$ der gegebenen Gleichung. Denn da $\tau = t^m$ ist, so ist $t = \tau^{\frac{1}{m}}$, und wenn man die Wurzeln der Gleichung $y^m - 1 = 0$ durch 1, α, β, $\gamma \ldots$, und die Werthe von τ, welche entstehen, wenn man der Reihe nach in den Ausdruck von τ (616.) 1, α, β, $\gamma \ldots$ statt α setzt, durch τ_0, τ_1, $\tau_2 \ldots$ bezeichnet, so erhält man, weil

617. $x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \alpha^3 x_4 \ldots + \alpha^{m-1} x_m = t$ (610.) $= \tau^{\frac{1}{m}}$

ist, folgende Gleichungen:

Ueber die algebraische Auflösung

$$618.\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \ldots + x_m = \tau_0^{\frac{1}{m}} \\ x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \alpha^3 x_4 \ldots + \alpha^{m-1} x_m = \tau_1^{\frac{1}{m}} \\ x_1 + \beta x_2 + \beta^2 x_3 + \beta^3 x_4 \ldots + \beta^{m-1} x_m = \tau_2^{\frac{1}{m}} \\ x_1 + \gamma x_2 + \gamma^2 x_3 + \gamma^3 x_4 \ldots + \gamma^{m-1} x_m = \tau_3^{\frac{1}{m}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

[*Nämlich die erste Gleichung* (618.) *erhält man, wenn man in* (617.) 1 *statt* α *setzt*, *die zweite, wenn man in* (617.) α *statt* α, *die dritte, wenn man* β, *die vierte, wenn man* γ *statt* α *setzt u. s. w.*]

Addirt man diese Gleichungen, so erhält man, vermöge der Eigenschaften der Wurzeln 1, α, β, γ.... [(612 *und* 613.) *dass nämlich die Summe der verschiedenen Potenzen der Wurzeln* 1, α, β, γ...., *die mte und die ote ausgenommen, gleich Null sind*],

$$619.\quad x_1 = \frac{\tau_0^{\frac{1}{m}} + \tau_1^{\frac{1}{m}} + \tau_2^{\frac{1}{m}} \ldots + \tau_{m-1}^{\frac{1}{m}}}{m}.$$

Multiplicirt man darauf die Gleichungen (618.) die erste mit 1, die zweite mit α^{m-1}, die dritte mit β^{m-1}, die vierte mit γ^{m-1} u. s. w. und addirt die Producte, so erhält man, vermöge der nämlichen Eigenschaften der Wurzeln 1, α, β, γ.... [(612 *und* 613.), *wie leicht zu sehen*],

der Gleichungen.

620. $x_2 = \frac{\tau_0^{\frac{1}{m}} + \alpha^{m-1}\tau_1^{\frac{1}{m}} + \beta^{m-1}\tau_2^{\frac{1}{m}} + \gamma^{m-1}\tau_3^{\frac{1}{m}} \ldots}{m}$.

Eben so findet man

621. $x_3 = \frac{\tau_0^{\frac{1}{m}} + \alpha m^{-2}\tau_1^{\frac{1}{m}} + \beta m^{-2}\tau_2^{\frac{1}{m}} + \gamma^{m-2}\tau_3^{\frac{1}{m}} \ldots}{m}$

u. s. w.

231.

Von diesen Ausdrücken ist zunächst zu bemerken, dass die Grösse $\tau_0^{\frac{1}{m}}$, da sie der Summe der Wurzeln der gegebenen Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 \ldots$ gleich ist (618.), unmittelbar gegeben ist. [*Sie ist nämlich dem Coefficienten des ersten Gliedes der gegebenen Gleichung* (608.) *gleich.*] Es ist also

622. $\tau_0^{\frac{1}{m}} = A$, und $\tau_0 = A^m$,

welche Gleichung nothwendig identisch seyn muss und, wenn es nöthig wäre, eine Probe der Rechnung abgeben könnte.

Es folgt ferner, dass, weil die Gleichung (616.), wenn man $\alpha = 1$ setzt,

623. $\tau_0 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \ldots$

giebt,

624. $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \ldots + \lambda_{m-1} = \tau_0 = A^m$,

und folglich

625. $\lambda_0 = A^m - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \ldots$

ist. Substituirt man dieses in den allgemeinen Aus-

Ueber die algebraische Auflösung

druck von τ (616.), so reducirt sich derselbe auf die einfachere Form

626. $\tau = A^m + (\alpha - 1)\lambda_1 + (\alpha^2 - 1)\lambda_2 + (\alpha^3 - 1)\lambda_3 \ldots,$

und man erhält also die Werthe von $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \ldots,$ wenn man $\alpha, \beta, \gamma \ldots,$ welches die Wurzeln der Gleichung

627. $y^{m-1} + y^{m-2} + y^{m-3} \ldots + 1 = 0$

sind, statt α setzt (§. 227.) [*Da nämlich die Wurzel* 1 *der Gleichung* $y^m - 1 = 0$ *jetzt ausgeschlossen ist, so können nur noch die Wurzeln der Gleichung* $\frac{y^{m-1}}{y-1} = y^{m-1} + y^{m-2} + y^{m-3} \ldots + 1 = 0$ *unter einander vertauscht werden.*]

232.

Die Schwierigkeit besteht also nur noch darin, die Werthe der Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots$ in dem Ausdruck von τ (626.) zu finden, in so fern dieselben nicht unmittelbar gegeben sind.

Bei dieser Untersuchung muss man unterscheiden, ob m eine Primzahl oder eine zusammengesetzte Zahl ist.

Wir wollen zuerst annehmen, m sey eine Primzahl, so ist oben in (§. 220.) gezeigt worden, dass, wenn α irgend eine Wurzel der Gleichung $y^m - 1 = 0$ ist, die Einheit ausgenommen, und man setzt in die Reihe der Potenzen $\alpha, \alpha^2, \alpha^3 \ldots \alpha^{m-1}$ statt α irgend eine dieser Potenzen selbst, dass man dann

der Gleichungen.

immer die nämliche Reihe der Potenzen wieder findet, blos in anderer Ordnung. Nun ist klar, dass in der Function t die Vertauschung von α mit α^2 der Vertauschung von x_2, x_3 *etc.* mit x_3, x_4, diejenige von α mit α^3 der Vertauschung von x_2, x_3 *etc.* mit x_4, x_5 u. s. w. entspricht. [*Nämlich das erste Glied* x_1 *in* t (610.) *kommt bei dieser Vertauschung nicht in Betracht, weil dessen Coefficient* 1 *und die Einheit jetzt von den Wurzeln der Gleichung* $y^m - 1 = 0$ *ausgeschlossen ist. Nur die Glieder* αx_2, $\alpha^2 x_3$ $\alpha^{m-1} x_m$ *von* t *werden vertauscht. Das erste Glied* x_1 *bleibt bei allen Vertauschungen das nämliche.*] Setzt man also, der Reihe nach, α^2, α^3 α^{m-1} statt α, so entspricht dieses eben so vielen Vertauschungen von x_2 mit x_3, x_4 x_m u. s. w., welches $m-1$ Vertauschungen sind, welche wieder jede mit allen möglichen Vertauschungen der $m-2$ Wurzeln x_3, x_4 x_m unter sich verbunden werden können.

Eben so wird es sich mit der Function τ verhalten; und da in dem Ausdrucke derselben die Vertauschungen von α mit α^2, α^3 den mit den Substitutionen von x_3, x_4 statt x_2 in t correspondirenden Vertauschungen von λ_1 mit λ_2, λ_3 entsprechen, so ist leicht zu sehen, dass die Grössen λ_1, λ_2, λ_3 die $m-1$ Wurzeln einer Gleichung vom $m-1$ten Grade sind, deren Coefficienten Functionen von x_1, x_2, x_3 sind, welche folglich nur so viele verschiedene Werthe haben können, als Per-

mutationen der $m-2$ Wurzeln $x_3, x_4 \ldots. x_m$ möglich sind, das heisst 1, 2, 3.... $m-2$ Werthe, und welche folglich von Gleichungen des 1, 2, 3.... $m-2$ten Grades abhangen.

233.

Es lässt sich selbst zeigen, dass alle diese Coefficienten nur von einer einzigen Gleichung des 1, 2, 3.... $m-2$ten Grades abhangen. Denn bezeichnet man die Gleichung in λ [*vom* $m-1$*ten Grade*], deren Wurzeln die gesuchten Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots.$ sind, durch

628. $\lambda^{m-1} - M\lambda^{m-2} + N\lambda^{m-3} - \ldots. = 0,$

so erhält man, wenn man in den Grössen M, N.... [*welche von* x_3, x_4.... *abhangen*] zwischen den Wurzeln $x_3, x_4 \ldots.$ die möglichen 1, 2, 3.... $m-2$ Permutationen macht, eben so viele ähnliche Gleichungen, welche, wenn man sie in einander multiplicirt, eine Endgleichung in λ vom 1, 2, 3.... $m-1$ten Grade geben, in welcher die Coefficienten unveränderliche Functionen der Wurzeln $x_1, x_2, x_3 \ldots.$ und folglich durch die Coefficienten A, B, C.... der gegebenen Gleichung bestimmbar sind. [*Nämlich der Exponent des Products von* 1, 2, 3.... $m-2$ *Gleichungen, jede vom* $m-1$*ten Grade, ist offenbar* $m-1\,(1.2.3\ldots.m-2) = 1.2.3\ldots.m-1$].

Die Gleichung $\lambda^{m-1} - M\lambda^{m-2} + N\lambda^{m-3} \ldots. = 0$ (628.), wird also ein Divisor dieser Endgleichung seyn. Dividirt man die beiden Gleichungen auf die

gewöhnliche Weise und setzt die $m-1$ Glieder des Restes einzeln gleich Null, so erhält man eben so viele Gleichungen, von welchen die $m-2$ ersten die Werthe von N, P.... in rationalen Functionen von M geben. Es ist also nur nöthig, die Gleichung in M vom 1, 2, 3....$m-1$ten Grade zu finden. [*Eine solche Gleichung, deren Wurzel M seyn würde, würde nämlich deshalb vom* 1, 2, 3.... $m-2$*ten Grade seyn, weil in den Grössen M, N....* 1.2.3.... $m-1$ *Permutationen der Grössen x_3, x_4.... möglich sind, und folglich die Grösse M,* 1.2.3.... $m-1$ *verschiedene Werthe hat.*]

Wenn also diese Gleichung aufgelöst werden könnte, wobei es hinreichend wäre, nur eine Wurzel zu haben, so hätte man die Werthe der Coefficienten der Gleichung in λ (628.) [*zunächst M und dann auch N und die übrigen, weil diese letzten durch M ausgedrückt werden*], welche Gleichung [(628.) *vom $m-1$ten Grade, also*] um einen Grad niedriger ist, als die gegebene Gleichung (608.), und deren $m-1$ Wurzeln die Werthe der Grössen λ_1, λ_2, λ_3.... in dem Ausdrucke von τ (626.) sind.

234.

Anstatt der Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3.... könnte es leichter seyn, geradezu die Wurzeln τ_1, τ_2, τ_3.... zu suchen. Es ist klar, dass diese Grössen [*weil ihre Zahl $m-1$ ist*] die Wurzeln einer Gleichung in τ vom $m-1$ten Grade sind, welche man findet, wenn man α zwischen dem Ausdrucke von τ (626.) und

Ueber die algebraische Auflösung

der Gleichung $\alpha^m - 1 = 0$, nachdem aus dieser die Wurzel 1 weggeschafft worden, also der Gleichung

$$629.\quad \alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \alpha^{m-3} \ldots + 1 = 0$$

eliminirt. Diese Gleichung in τ wird auf diese Weise die Wurzel α nicht enthalten, und wenn man ihre Coefficienten, die in λ_0, λ_1, $\lambda_2 \ldots$ ausgedrückt sind, als Functionen der Wurzeln x_1, x_2, $x_3 \ldots$ betrachtet, so werden dieselben nicht mehr als $1.2.3 \ldots m-2$ Vertauschungen durch alle mögliche Permutationen der Wurzeln fähig seyn. Denn da die Veränderung der Stelle des Vorkommens von x_2 den Substitutionen von α^2, $\alpha^3 \ldots$ statt α entspricht, die Grösse α aber aus der Gleichung in τ verschwunden ist, so folgt, dass man in dem Ausdruck ihrer Coefficienten x_2 als fest betrachten kann, eben wie x_1.

Ohne wirklich zu eliminiren, kann man die Gleichung in τ vermittelst ihrer Wurzeln τ_1, τ_2, $\tau_3 \ldots$, deren Ausdrücke gegeben sind (618.), direct finden. Denn setzt man die Gleichung in τ

$$630.\quad \tau^{m-1} - T\tau^{m-2} + U\tau^{m-3} - \ldots = 0,$$

so ist, vermöge der bekannten Eigenschaften der Gleichungen,

$$631.\quad \begin{cases} T = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \ldots \\ U = \tau_1\tau_2 + \tau_1\tau_3 \ldots + \tau_2\tau_3 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

235.

Die Berechnung dieser Coefficienten lässt sich erleichtern, wenn man dieselben aus der Summe der

der Gleichungen.

successiven Potenzen der Wurzeln τ_1, $\tau_2 \ldots$, bis zur mten Potenz genommen, ableitet.

Nimmt man nämlich die zweite, dritte etc. Potenz des Polynoms

633. $[\tau_1 =] \, \lambda_0 + \alpha\lambda_1 + \alpha^2\lambda_2 + \alpha^3\lambda_3 \ldots + \alpha^{m-1}\lambda_{m-1}$,

und bezeichnet die Glieder dieser Potenzen, in welchen die Grösse α, nachdem überall 1 für α^m, α für α^{m+1} u. s. w. gesetzt worden, nicht vorkommt, durch ${}_2\lambda$, ${}_3\lambda$, ${}_4\lambda$ *etc.*, setzt auch noch, der Gleichförmigkeit wegen,

634. $\tau_0 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \ldots + \lambda_{m-1}$ (624.),

so dass die Grössen τ_0, τ_1, τ_2 *etc.* den Wurzeln 1, α, $\beta \ldots$ correspondiren, so ist aus den obigen Eigenschaften dieser Potenzen leicht zu sehen, dass

$$635. \begin{cases} \tau_0 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \ldots = m \,.\, \lambda_0 \\ \tau_0^2 + \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 \ldots = m \,.\, {}_2\lambda \\ \tau_0^3 + \tau_1^3 + \tau_2^3 + \tau_3^3 \ldots = m \,.\, {}_3\lambda \end{cases}$$

.

[*Es ist nämlich*

$$\tau_0 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \ldots + \lambda_{m-1}$$
$$\tau_1 = \lambda_0 + \alpha\lambda_1 + \alpha^2\lambda_2 + \alpha^3\lambda_3 \ldots + \alpha^m\lambda_{m-1}$$
$$\tau_2 = \lambda_0 + \beta\lambda_1 + \beta^2\lambda_2 + \beta^3\lambda_3 \ldots + \beta^m\lambda_{m-1}$$
$$\tau_3 = \lambda_0 + \gamma\lambda_1 + \gamma^2\lambda_2 + \gamma^3\lambda_3 \ldots + \gamma^m\lambda_{m-1}$$

. .

Hieraus folgt zunächst, wenn man alle diese Gleichungen addirt,

$\tau_0 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \ldots = m\lambda_0$, *wie in* (635.),

Ueber die algebraische Auflösung

weil $1+\alpha+\beta+\gamma\ldots\ldots = 0$, $1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\ldots\ldots = 0$ *etc.* (612.)

Nimmt man ferner die verschiedenen Potenzen von $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3\ldots\ldots$, *so sind in denselben nothwendig gleiche Verbindungen der Grössen* $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\ldots\ldots$ *mit gleichen Potenzen von* $1, \alpha, \beta, \gamma\ldots\ldots$ *multiplicirt, weil in den Grössen* $\tau_0, \tau_1, \tau_2\ldots\ldots$ *die Grössen* $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\ldots\ldots$ *ganz gleichförmig vorkommen. Ausserdem aber steigen die Potenzen von* α *nur bis zur* m*ten, weil* α^m *wiederum gleich* 1, α^{m-1} *gleich* α *u. s. w. ist; die Summe einer beliebigen* n*ten Potenz der Grössen* $\tau_0, \tau_1, \tau_2\ldots\ldots$ *ist also nothwendig von der Form*

$$\begin{aligned}&(1+\alpha^0+\beta^0+\gamma^0\ldots\ldots)P\\ &+(1+\alpha\ +\beta\ +\gamma\ \ldots\ldots)Q\\ &+(1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\ldots\ldots)R\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

welches sich, weil $1+\alpha+\beta+\gamma\ldots\ldots = 0$, $1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\ldots\ldots = 0$ *etc.* (612.), *auf* $(1+\alpha^0+\beta^0+\gamma^0\ldots\ldots)P$, *oder auf die Glieder reducirt, die gar kein* $\alpha, \beta, \gamma\ldots\ldots$ *enthalten, also auf* $m\,._n\lambda$, *woraus*

$$\tau_0^n+\tau_1^n+\tau_2^n+\tau_3^n\ldots\ldots = m\,._n\lambda$$

folgt, welches die übrigen Ausdrücke (635.) *giebt.*]

Nun ist $\tau_0 = A^m$ (624.). Zieht man also, der Reihe nach, von den Grössen $m\lambda_0$, $m\,._2\lambda$, $m\,._3\lambda\ldots\ldots$ die Potenzen von A^m ab, so erhält man aus (635.)

$$636.\quad \begin{cases}\tau_1\ +\tau_2\ +\tau_3\ \ldots\ldots = m\,.\lambda_0 - A^m\\ \tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2\ldots\ldots = m\,._2\lambda - A^m\\ \tau_1^3+\tau_2^3+\tau_3^3\ldots\ldots = m\,._3\lambda - A^m\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

Hieraus

der Gleichungen.

Hieraus lassen sich, vermöge der Ausdrücke (17. §. 8.) die Summen der Producte der Wurzeln $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \ldots$ zu zweien, zu dreien u. s. w., wie folgt, finden:

637. $$\begin{cases} T = m\lambda_0 - A^m \\ U = \frac{1}{2}((m\lambda_0 - A^m)T - (m.{}_2\lambda - A^{2m})) \\ V = \frac{1}{3}((m\lambda_0 - A^m)U - (m.{}_2\lambda - A^{2m})T + (m.{}_3\lambda - A^{3m})) \end{cases}$$
etc.

236.

Macht man nun in diesen Ausdrücken der Coefficienten T, U, $V \ldots$ [*der Gleichung in* τ (630)] durch $x_1, x_2, x_3 \ldots$ alle mögliche Permutationen von $x_1, x_2, x_3 \ldots$, so erhält man nur $1.2.3 \ldots m-2$ solcher Permutationen, die lediglich aus Vertauschung der $m-2$ Wurzeln $x_2, x_3 \ldots$ entstehen.

Man findet also zur Bestimmung von T eine Gleichung vom $1.2.3 \ldots m-2$ten Grade, welche man mit Hülfe ihrer Wurzeln aufstellen kann. Sodann aber lassen sich, auf dieselbe Weise, wie oben bei den Coefficienten der Gleichung in λ (§. 233.), die Werthe der andern Coefficienten U, $V \ldots$ durch rationale Ausdrücke mit T finden.

Die Aufgabe lässt sich also auf die Auflösung einer Gleichung in T vom $1.2.3 \ldots m-2$ten Grade reduciren, welche immer von einem höhern Grade ist, als die gegebene Gleichung, sobald m grösser ist als 4 [*denn z. B. für* $m = 4$ *ist* $1.2.3 \ldots m-2 = 1.2 = 2$, *also* $1.2.3 \ldots m-2 < m$. *Hingegen für* $m = 5$ *ist* $1.2.3 \ldots m-2 = 1.2.3 = 6$, *also schon* $1.2.3 \ldots m-2 > m$ *u. s. w.*]

Es ist möglich, dass sich diese Gleichung auf eine andere von niedrigerer Ordnung reduciren lässt. Es scheint mir aber schwer, wenn nicht unmöglich, hiervon a priori zu urtheilen. [*Diese Aeusserung ist für die weitere Untersuchung dieses Gegenstandes sehr merkwürdig.*]

237.

Für die Wurzeln α, β, $\gamma\ldots$ erhält man, da sie nebst der Einheit die Wurzeln der Gleichung $y^m - 1 = 0$ sind, wenn man diese Gleichung durch $y - 1$ dividirt, um daraus die Wurzel 1 wegzuschaffen, die Gleichung

$$638.\quad y^{m-1} + y^{m-2} + y^{m-3} \ldots + 1 = 0$$

deren $m - 1$ Wurzeln die Grössen α, β, $\gamma\ldots$ sind.

Diese Gleichung ist, wie man sieht, von einer um Eins niedrigern Ordnung als die gegebene Gleichung. Da sie aber sich umkehren lässt, so kann ihre Ordnungs-Zahl immer auf die Hälfte reducirt werden. Auch kann man sie, der schönen Entdekkung von Gauss zu Folge, mit Hülfe so vieler einzelnen Gleichungen auflösen, als $m - 1$ Primzahlen zu Factoren hat, deren Ordnungs-Zahlen dann nicht höher steigen, als die Factoren. Man kann sie selbst direct, ohne irgend eine Hülfs-Gleichung, auflösen, wie sich in dem folgenden Zusatze zeigen wird.

der Gleichungen.

238.

Wir nahmen in (§. 232.) an, der Exponent m der gegebenen Gleichung sey eine Primzahl. Wir wollen nun den andern Fall untersuchen, wenn m eine zusammengesetzte Zahl ist.

In diesem Fall sind die Wurzeln der Gleichung $y^m - 1 = 0$, wie wir sahen, zweierlei Art. Diejenigen der einen Art hat die Gleichung $y^n - 1 = 0$, wenn n ein Divisor von m ist, mit der gegebenen Gleichung gemeinschaftlich, und ihre Potenzen können nicht alle Wurzeln der Stammgleichung ausdrükken, weil ihre Werthe nur bis zur nten Potenz verschieden sind und weiterhin immer in der nämlichen Ordnung wiederkehren. Die der andern Art gehören nur der Gleichung $y^m - 1 = 0$ allein an und haben die nämlichen Eigenschaften wie die Wurzeln dieser Gleichung selbst, wenn m eine Primzahl ist. Das Raisonnement von (§. 232.) muss also zunächst auf die Wurzeln α, welche der Gleichung $y^m - 1 = 0$ eigen sind, beschränkt, und die Folgerungen, welche daraus für die Gleichung mit λ gezogen sind, müssen modificirt werden. Ausserdem kann man selbst, wenn man nur diese Wurzeln für α setzt, nicht sagen, dass die Substitution einer beliebigen Potenz von α statt α immer wieder die nämlichen Werthe in der Reihe $\alpha, \alpha^2, \alpha^3 \ldots\ldots \alpha^{m-1}$ gebe, weil, wenn $m = np$ ist, die Substitution von α^n statt α, wegen $\alpha^{np} = 1$, nur die Potenzen $\alpha^n, \alpha^{2n}, \alpha^{3n} \ldots\ldots \alpha^{np}$ giebt. Daraus folgt, dass alsdann die Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots\ldots$ nicht

Ueber die algebraische Auflösung

mehr die Wurzeln einer und derselben Gleichung seyn können, sondern dass sie von verschiedenen Gleichungen abhangen, welche man einzeln suchen müsste, welches aber die Rechnung weitläufig machen würde.

Bedient man sich dagegen der Wurzeln, welche die Gleichung $y^n - 1 = 0$ ebenfalls hat, so lässt sich das allgemeine Verfahren vereinfachen, und die Auflösung der gegebenen Gleichung des mten Grades reducirt sich auf die Auflösung so vieler Gleichungen von niedrigerer Ordnung, z. B. der nten, als der Exponent Primzahlen zu Factoren hat. Dieses wollen wir näher auseinandersetzen.

239.

Wir wollen annehmen m habe den Factor n, so gehören, zu Folge (§. 221.), alle Wurzeln der Gleichung $y^n - 1 = 0$ auch der Gleichung $y^m - 1 = 0$ an. Wir können also in die Function

639. $t = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \alpha^3 x_4 \ldots + \alpha^{m-1} x_m$ (617.)

statt α eine der Wurzeln der Gleichung $y^n - 1 = 0$ setzen. Alsdann ist $\alpha^n = 1$, $\alpha^{n+1} = \alpha$, $\alpha^{n+2} = \alpha^2 \ldots$

$$\alpha^{2n} = 1,\ \alpha^{2n+1} = \alpha,\ \alpha^{2n+2} = \alpha^2 \ldots$$

bis zu $\alpha^m = 1$ [*so dass also die nämlichen Potenzen von α in der Reihe* (639.) *öfter wiederkehren*]. Der Ausdruck von t (639.) lässt sich also auf die einfachere Form

640. $t = X_1 + \alpha X_2 + \alpha^2 X_3 \ldots + \alpha^{n-1} X_n$

der Gleichungen.

bringen, wenn man, der Kürze wegen,

$$641.\ \begin{cases} x_1 + x_{n+1} + x_{2n+1} \dots + x_{m-n+1} = X_1 \\ x_2 + x_{n+2} + x_{2n+2} \dots + x_{m-n+2} = X_2 \\ x_3 + x_{n+3} + x_{2n+3} \dots + x_{m-n+3} = X_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n + x_{2n} + x_{3n} \dots x_m = X_n \end{cases}$$

setzt.

Betrachtet man nun die Grössen X_1, X_2, $X_3 \dots X_n$ als die Wurzeln einer Gleichung des nten Grades, so lassen sich auf die Functionen t (640.) ganz die Schlüsse von (§. 229 und 230.) anwenden, und die Resultate, welche man findet, sind den dortigen ganz ähnlich.

Setzt man also jetzt

$$642.\ t^n = \tau,$$

so ist, wegen $\alpha^n = 1$, der Ausdruck von τ von der Form

$$643.\ \tau = \lambda_0 + \alpha\lambda_1 + \alpha^2\lambda_2 + \alpha^3\lambda_3 \dots + \alpha^{n-1}\lambda_{n-1},$$

[*wie* (616.)], in welchem die Grössen λ_0, λ_1, $\lambda_2 \dots$ gegebene Functionen von X_1, X_2, $X_3 \dots$ sind, welche die Eigenschaft haben, sich durch gleichzeitige Vertauschung der Grössen X_1, $X_2 \dots X_n$ mit X_2, $X_3 \dots X_1$ nicht zu verändern.

Kennt man nun diese Grössen, so erhält man unmittelbar die Werthe der Wurzeln X_1, X_2, $X_3 \dots$ durch Ausdrücke, wie in (§. 230.).

Setzt man also die Wurzeln der Gleichung $y^n - 1 = 0$ gleich 1, α, β *etc.*, und die Werthe von τ, wel-

Ueber die algebraische Auflösung

che den Werthen 1, α, β, γ *etc.* von α entsprechen, gleich τ_1, τ_2, τ_3, so erhält man

$$644. \begin{cases} X_1 = \dfrac{\tau_0^{\frac{1}{n}} + \tau_1^{\frac{1}{n}} + \tau_2^{\frac{1}{n}} \ldots}{n} \\ X_2 = \dfrac{\tau_0^{\frac{1}{n}} + \alpha^{n-1}\tau_1^{\frac{1}{n}} + \beta^{n-1}\tau_2^{\frac{1}{n}} \ldots}{n} \\ X_3 = \dfrac{\tau_0^{\frac{1}{n}} + \alpha^{n-2}\tau_1^{\frac{1}{n}} + \beta^{n-2}\tau_2^{\frac{1}{n}} \ldots}{n} \\ etc. \end{cases}$$

[*wie* (619. 620. 621.)], wo zu bemerken, dass das Glied τ_0 immer der Summe der Wurzeln gleich ist, welche hier

$$645. \quad X_1 + X_2 + X_3 \ldots = x_1 + x_2 + x_3 \ldots = A$$

ist.

Man findet auf diese Weise erst die Wurzeln X_1, X_2, X_3 Um auch die ursprünglichen Wurzeln x_1, x_2, x_3 zu finden, darf man nur diejenigen derselben, aus welchen jedesmal eine der Grössen X_1, X_2, X_3 zusammengesetzt ist, als die Wurzeln einer Gleichung betrachten, deren Ordnungs-Zahl ihrer Anzahl gleich ist, und mit diesen Gleichungen auf dieselbe Weise verfahren, wie vorhin.

240.

Wenn n eine Primzahl ist, welches sich immer annehmen lässt, wenn man für n einen Factor von m nimmt, der eine Primzahl ist, so sind die Grössen

der Gleichungen.

λ_1, λ_2, λ_3, wie in (§. 232.) die Wurzeln einer Gleichung vom $n-1$ten Grade, deren Coefficienten von einer Gleichung des $1.2.3 \ldots . n-2$ten Grades abhängen. Diese letzte Gleichung hat rationale Functionen der Coefficienten der Gleichung in X, deren Wurzeln X_1, X_2, X_3 sind, zu Coefficienten; jene Coefficienten sind aber nicht bekannt. Nur die Coefficienten der gegebenen Gleichung, deren Wurzeln x_1, x_2, x_3 sind, sind gegeben. Man muss daher untersuchen, wie jene von diesen abhangen.

Es ist klar, dass man, wenn man für X_1, X_2, X_3 ihre Werthe in x_1, x_2, x_3 setzt, für die Coefficienten der Gleichung in λ gegebene Functionen der Wurzeln x_1, x_2, x_3 erhält. Um die Gleichungen zu finden, von welchen diese Functionen abhangen [*oder die Wurzeln sind*], kommt es darauf an, zu suchen, wie viele verschiedene Werthe diese Functionen durch alle die möglichen Verwechselungen der Wurzeln x_1, x_2, x_3 erhalten können.

241.

Die Gesammtzahl der Permutationen der m Wurzeln ist im Allgemeinen $1.2.3 \ldots . m$. Kommen aber darunter Verwechselungen vor, welche die obigen Functionen auf keine Weise verändern, so muss man die Gesammtzahl der Permutationen durch die Zahl jener dividiren, weil jede solche Permutation, indem sie sich mit der andern verbindet, keine neue Grösse giebt.

Ueber die algebraische Auflösung

Nun sind zwischen den Wurzeln $x, x_{n+1} \ldots x_{m-n+1}$, welche in dem Ausdrucke von X_1 (641.) vorkommen, und deren Zahl p ist, weil $m = np$ war, $1.2.3 \ldots p$ Permutationen möglich. Da aber die Wurzeln in X_1 ganz auf dieselbe Weise vorkommen, so entstehet aus der Verwechselung derselben gar keine Veränderung des Werthes von X_1, folglich ist der obige Divisor die Zahl $1.2.3 \ldots p$.

Mit der Grösse X_1 verhält es sich eben so. Sie giebt ebenfalls den Divisor $1.2.3 \ldots p$, so dass nun der Divisor für die beiden Grössen X_1 und X_2 schon $(1.2.3 \ldots p)^2$ ist. Eben so geben die drei Grössen X_1, X_2, X_3 den Divisor $(1.2.3 \ldots p)^3$, und folglich die n Functionen $X_1, X_2, X_3 \ldots X_n$ den Divisor $(1.2.3 \ldots p)^n$.

Endlich können die n Grössen $X_1, X_2, X_3 \ldots$ unter sich selbst $1.2.3 \ldots n$ mal verwechselt werden; und da die Coefficienten der Gleichung in X unveränderliche Functionen dieser Grössen sind, so entstehet daraus ein neuer Divisor $1.2.3 \ldots n$.

Daraus folgt, dass die Coefficienten der Gleichung in X, als Functionen der m Wurzeln $x_1, x_2, x_3 \ldots$ betrachtet, nur $\frac{1.2.3 \ldots m}{1.2.3 \ldots n\,(1.2.3 \ldots p)^n}$ verschiedene Werthe haben und folglich nur von einer Gleichung dieser Ordnung abhangen.

Die Coefficienten der Gleichung des $1.2.3 \ldots n-2$ten Grades, welche rationale Functionen der-

jenigen der Gleichung in X sind, hangen also von einer Gleichung dieses Grades ab.

Giebt man also diesen Coefficienten alle Werthe, welche den Wurzeln der letzten Gleichung entsprechen, und multiplicirt alle entstehende Gleichungen in einander, so erhält man endlich eine Gleichung vom Grade $\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots n(1.2.3\ldots p)^n}.1.2.3\ldots n-2$, oder

$$646. \quad \frac{1.2.3\ldots m}{(n-1)n(1.2.3\ldots p)^n},$$

von welcher nun die Coefficienten der Gleichung in λ, welche vom $n-1$ten Grade ist und deren Wurzeln λ_1, λ_2, $\lambda_3\ldots$ sind, abhangen. Man kann also sagen, dass sich die Auflösung der gegebenen Gleichung vom mten Grade am Ende auf die Auflösung einer Gleichung vom $\frac{1.2.3\ldots m}{(n-1)n(1.2.3\ldots p)^n}$ten Grade reduciren lässt.

242.

Um die Auflösung der gegebenen Gleichung in x zu vollenden, muss man noch den Werth ihrer Wurzeln x_1, x_2, $x_3\ldots x_m$ aus demjenigen der Wurzeln X_1, X_2, $X_3\ldots$ (§. 239.) nehmen. Zu dem Ende kann man die p Wurzeln x, $x_{n+1}\ldots etc.$, aus welchen X_1 zusammengesetzt ist (641.), als die Wurzeln einer Gleichung des pten Grades von der Form

$$647. \quad x^p - X_1 x^{p-1} + \varkappa x^{p-2} - \mu x^{p-3} + \nu x^{p-4}\ldots = 0$$

ansehen, in welcher die Coefficienten $\varkappa, \mu, \nu \ldots$ noch unbekannt sind. Da aber diese Gleichung p von den m Wurzeln der gegebenen Gleichung $x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} \ldots = 0$ enthält, wenn $m = np$ ist, so muss sie ein Divisor dieser Gleichung seyn. Man darf daher nur mit derselben auf die gewöhnliche Weise wirklich dividiren und die Glieder in den Resten, welche $x^{p-1}, x^{p-2} \ldots$ enthalten, einzeln Null setzen. Man erhält dadurch p Gleichungen in $X, \varkappa, \mu, \nu$ *etc.*, von welchen die $p-1$ ersten die Werthe von $\varkappa, \mu, \nu \ldots$ in X_1 und zwar in linearer Form geben. Ist daher X_1 bekannt, so erhält man auch $\varkappa, \mu, \nu \ldots$ und darf nur noch diese Gleichungen vom pten Grade auflösen. Substituirt man eben so den Werth von X_2 statt X, so erhält man die Gleichung, welche die Wurzeln $x_2, x_{n+2}, x_{2n+2} \ldots$ (641.) giebt u. s. w.

243.

Man sieht hieraus, dass sich dieses Verfahren darauf reducirt, die Gleichung vom Grade $m = np$ in n Gleichungen vom pten Grade zu zerlegen. Nach der gewöhnlichen Methode dagegen würde man eine Gleichung vom Grade $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{p}$ten Grade auflösen müssen, wie wir im zehnten Zusatze sahen, statt dass zu der gegenwärtigen nur die Auflösung einer Gleichung vom Grade $\frac{1.2.3\ldots m}{(n-1)n(1.2.3\ldots p)^n}$

nöthig ist, welche immer niedrigerer Ordnung ist, als jene.

Es sey z. B. $m = 4$, $n = 2$, $p = 2$, so ist die erste Zahl $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$, die letzte dagegen nur $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 2^2} = 3$.

Es sey $m = 6$, $n = 2$, $p = 3$, so sind die beiden Zahlen $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$ und $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} = 10$; und wenn $n = 3$, $p = 2$ wäre, $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$ und $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 3 (1 \cdot 2)^3} = 15$ u. s. w.

244.

Wir wollen nun diese Theorie auf die Gleichungen des zweiten, dritten und vierten Grades anwenden.

Es sey zuerst die Gleichung des zweiten Grades

648. $$x^2 - Ax + B = 0$$

gegeben, deren Wurzeln x_1 und x_2 seyn sollen.

In diesem Falle ist $m = 2$, welches man als eine Primzahl ansehen kann. Nimmt man für α eine Wurzel der Gleichung $y^2 - 1 = 0$, so kann man

$$t = x_1 + \alpha x_2$$

setzen, woraus [*quadrirt*]

$$\tau = t^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2\alpha x_1 x_2$$

folgt, weil $\alpha^2 = 1$. Also ist [*aus* (616.)] λ_1 die unveränderliche Function $2x_1 x_2$ der beiden Wurzeln x_1 und x_2. In der That ist auch $B = x_1 x_2$ und

Ueber die algebraische Auflösung

folglich $\lambda_1 = 2B$. Nun giebt die Gleichung $y^2 - 1 = 0$, $y = 1$ und $y = -1$, also $\alpha = -1$ [*nämlich* α *ist die andere Wurzel ausser* 1] und nach (626.) $\tau = A^2 - 2\lambda_1 = A^2 - 4B$. Also sind die Ausdrücke der beiden Wurzeln [*weil* $\tau_0^{\frac{1}{m}} = x_1 + x_2 = A$ *ist*] nach (619.)

$$649.\ \begin{cases} x_1 = \dfrac{A + \sqrt{(A^2 - 4B)}}{2} \text{ und} \\ x_2 = \dfrac{A - \sqrt{(A^2 - 4B)}}{2}; \end{cases}$$

wie bekannt.

245.

Es sey die allgemeine Gleichung des dritten Grades

$$650.\ x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$$

gegeben, deren Wurzeln $x_1\ x_2\ x_3$ seyn sollen.

Hier ist m die Primzahl 3. Die Function t (610.) ist also, wenn man für α eine Wurzel der Gleichung $y^3 - 1 = 0$ setzt,

$$t = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3$$

und τ oder t^3 ist, weil $\alpha^3 = 1$ nach (616.)

$$\tau = \lambda_0 + \alpha\lambda_1 + \alpha^2\lambda_2,$$

wo

$$651.\ \begin{cases} \lambda_0 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6x_1 x_2 x_3 \\ \lambda_1 = 3(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1) \\ \lambda_2 = 3(x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_3^2 x_2) \end{cases}$$

[*Es ist nämlich*

$$\tau = t = (x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3)^3 =$$

der Gleichungen.

$$x_1^3 + \alpha^3 x_2^3 + \alpha^6 x_3^3 + 3\alpha x_2 x_1^2 + 3\alpha^2 x_3 x_1^2 + 3\alpha^4 x_3 x_2^2$$
$$+ 3\alpha^2 x_1 x_2^2 + 3\alpha^4 x_1 x_3^2 + 3\alpha^5 x_2 x_3^2 + 6\alpha x_1 x_2 x_3,$$

oder, weil $\alpha^3 = \alpha^6 = 1$,

$$\tau = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6 x_1 x_2 x_3$$
$$+ 3\alpha(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1)$$
$$+ 3\alpha^2(x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_3^2 x_2),$$

woraus die obigen Werthe der drei Grössen λ_0, λ_1 *und* λ_2 *folgen, deren erste der Coefficient* α^0, *die zweite der Coefficient zu* α, *die dritte der Coefficient zu* α_2^2 *ist.*]

Die Grössen λ_1, λ_2 sind also die Wurzeln einer Gleichung des zweiten Grades (§. 232.), deren Coefficienten von einer Gleichung des $1 . 2 m - 2 = 1$ ten Grades abhängen, und welche folglich rationale Functionen der Coefficienten der gegebenen Gleichung sind. In der That sieht man, dass bei allen möglichen Permutationen der drei Wurzeln $x_1\, x_2\, x_3$ die beiden Functionen λ_1 und λ_2 die nämlichen bleiben oder nur eine in die andere übergehen, so dass, wenn man λ_1 und λ_2 die Wurzeln der Gleichung

652. $\lambda_2 - M\lambda + N = 0$ (628.)

seyn lässt,

653. $M = \lambda_1 + \lambda_2$ und $N = \lambda_1 \lambda_2$,

welches unveränderliche und folglich durch die Coefficienten A, B, C der gegebenen Gleichung bestimmbare Functionen von $x_1\, x_2\, x_3$ sind.

Durch die Ausdrücke von (§. 171.) findet man leicht

654. $\begin{cases} M = \lambda_1 + \lambda_2 = 3AB - 9C \text{ und} \\ N = \lambda_1 \lambda_2 = 9B^3 + 9(A^3 - 6AB)C + 81C^2. \end{cases}$

Man darf also nur die Gleichung zweiter Ordnung

$\lambda_2 - (3AB - 9C)\lambda + 9B^3 + 9(A^3 - 6AB)C + 81C^2 = 0$

auflösen und die beiden Wurzeln derselben, λ_1 und λ_2 suchen.

Setzt man darauf nach (626.)

$$\tau_1 = A_3 + (\alpha - 1)\lambda_1 + (\alpha^2 - 1)\lambda_2$$
$$\tau_2 = A_3 + (\beta - 1)\lambda_1 + (\beta^2 - 1)\lambda_2$$

und in die Ausdrücke von $x_1\, x_2\, x_3$ (§. 230.) $m = 3$ und $A = \tau_0^{\frac{1}{3}}$, so erhält man

$$x_1 = \frac{A + \tau_1^{\frac{1}{3}} + \tau_2^{\frac{1}{3}}}{3}$$

$$x_2 = \frac{A + \alpha^2 \tau_1^{\frac{1}{3}} + \beta^2 \tau_2^{\frac{1}{3}}}{3}$$

$$x_3 = \frac{A + \alpha \tau_1^{\frac{1}{3}} + \beta \tau_2^{\frac{1}{3}}}{3},$$

oder, weil $\beta = \alpha^2$ und $\beta^2 = \alpha_1$,

655. $$\begin{cases} x_1 = \dfrac{A + \tau_1^{\frac{1}{3}} + \tau_2^{\frac{1}{3}}}{3} \\ x_2 = \dfrac{A + \beta \tau_1^{\frac{1}{3}} + \alpha \tau_2^{\frac{1}{3}}}{3} \\ x_3 = \dfrac{A + \alpha \tau_1^{\frac{1}{3}} + \beta \tau_2^{\frac{1}{3}}}{3} \end{cases}$$

Die beiden Grössen α und β sind, zu Folge (§. 237.), die Wurzeln der Gleichung $y^2 + y + 1 = 0$, und folglich

der Gleichungen.

$$\alpha = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2},\ \beta = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

246.

Man kann aber auch, vermittelst der Gleichung in τ (630.), welche vom zweiten Grade ist, noch einfachere Ausdrücke finden.

Setzt man für diese Gleichung

656. $\tau^2 - T\tau + U = 0$,

so findet man die Werthe von T und U aus den Ausdrücken (637.). Man findet

$$T = 3\lambda_0 - A^3$$
$$U = \tfrac{1}{2}T(3\lambda_0 - A^3) - \tfrac{1}{2}(3 \cdot {}_2\lambda - A^6),$$

wo ${}_2\lambda$ das erste Glied ohne α in der Entwickelung von $(\lambda_0 + \alpha\lambda_1 + \alpha^2\lambda_2)^3$ ist (§. 235.). Dieses Glied ist

$${}_2\lambda = \lambda_0^2 + 2\lambda_1\lambda_2.$$

Nun ist nach (§. 231.) $\lambda_0 = A^3 - \lambda_1 - \lambda_2 = A^3 - M$, also, weil $\lambda_1\lambda_2 = N$ (653.),

$$T = 2A^3 - 3M$$
$$U = \tfrac{1}{2}(T^2 - 3(A^3 - M)^2 - 6N + A^6).$$

Setzt man hierin die obigen Werthe von M und N (654.), so erhält man

$$T = 2A^3 - 9AB + 27C$$
$$U = A^6 - 9A^4B + 27A^2B^2 - 27B^3 = (A^2 - 3B)^3;$$

die Gleichung in τ (656.) ist also

$$\tau^2 - (2A^3 - 9AB + 27C)\tau + (A^2 - 3B)^3 = 0,$$

deren beide Wurzeln, welche τ_1 und τ_2 sind, in die obigen Ausdrücke von $x_1\, x_2\, x_3$ (655.) gesetzt, die

Ueber die algebraische Auflösung

einfachste Auflösung der Gleichungen des dritten Grades geben.

[*Die Ausdrücke geben, wenn man die Berechnung ausführt, die Cardanische Formel.*]

247.

Wir kommen zu den Gleichungen der vierten Ordnung, welche durch

657. $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$

ausgedrückt werden können.

Da hier der Exponent $4 = 2.2$ ist, so ist es besser, nach (§. 239.) zu verfahren. Es ist also daselbst $n = 2$. Für α nehme man eine Wurzel der Gleichung $y^2 - 1 = 0$, so dass $\alpha^2 = 1$. Hierauf setze man

658. $\begin{cases} t = X_1 + \alpha X_2 \quad (640.) \\ \left.\begin{array}{l} X_1 = x_1 + x_3 \\ X_2 = x_2 + x_4 \end{array}\right\} (641.) \end{cases}$

so erhält man

659. $\begin{cases} \tau = \lambda_0 + \alpha\lambda_1 \quad (643.\ 616.) \\ \lambda_0 = X_1^2 + X_2^2 \\ \lambda_1 = 2X_1 X_2. \end{cases}$

Also ist die Gleichung in λ, von welcher λ_1 eine Wurzel ist, nur vom $n - 1 = 1$ten Grade und ihre Coefficienten hangen nur von einer Gleichung des $\frac{1.2.3.4}{2.2^2} = 3$ten Grades ab (§. 241.), so dass man die Gleichung

660. $\lambda_1^3 - M\lambda_1^2 + N\lambda_1 - P = 0$ (628.),

annehmen kann.

Die

der Gleichungen.

Die Wurzeln dieser Gleichung sind die drei verschiedenen Werthe der Grösse

661. $\lambda_1 = 2 X_1 X_2 = 2(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)$ (659. 658.)

welche durch die Verwechselung der drei Wurzeln [x_2 x_3 *und* x_4] entstehen, und es ist leicht zu sehen, dass diese Werthe nur folgende seyn können.

662. $$\left.\begin{matrix} 2(x_1 + x_3)(x_2 + x_4) \\ 2(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) \\ 2(x_1 + x_4)(x_2 + x_3) \end{matrix}\right\} = \lambda_1$$

Aus diesen Wurzeln kann man die Coefficienten M und N zusammensetzen, welche also durch unveränderliche Functionen von x_1 x_2 x_3 x_4 ausgedrückt werden und folglich durch A, B, C, D bestimmbar sind.

248.

Um diese Untersuchung zu erleichtern, bemerken wir, dass [*der Coefficient B des dritten Gliedes der gegebenen Gleichung die Summe der Producte der Wurzeln zu zweien, also*]

$$B = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4,$$

oder

663. $$\begin{cases} B = (x_1 + x_3)(x_2 + x_4) + x_1 x_3 + x_2 x_4 = \\ \qquad \lambda_1 + x_1 x_3 + x_2 x_4 \\ = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1 x_2 + x_3 x_4 = \\ \qquad \lambda_1 + x_1 x_2 + x_3 x_4 \\ = (x_1 + x_4)(x_2 + x_3) + x_1 x_4 + x_2 x_3 = \\ \qquad \lambda_1 + x_1 x_4 + x_2 x_3 \end{cases}$$

ist. Setzt man daher

664. $$\lambda_1 = 2B - 2u,$$

so lässt sich die Gleichung in λ_1 (661.) auf eine andere in u reduciren, deren drei Wurzeln

665. $x_1 x_3 + x_2 x_4$, $x_1 x_2 + x_3 x_4$, $x_1 x_4 + x_2 x_3$

sind. Diese Gleichung werde durch

666. $u^3 - Ru^2 + Su - T = 0$

bezeichnet, so ist [*die Summe ihrer Wurzeln R*]

667. $R = x_1 x_3 + x_2 x_4 + x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_1 x_4 + x_2 x_3$
$= B$ (663.).

Eben so findet man vermittelst der Formeln des zehnten Zusatzes folgende Werthe von S und T:

668. $S = AC - 4D$ und $T = (A^2 - 4B)D + C^2$.

Man bezeichne durch u_1 irgend eine der Wurzeln der Gleichung in u (666.), welche jetzt

669. $u^3 - Bu^2 + (AC - 4D)u - (A^2 - 4B)D - C^2 = 0$

ist, so ist

$$\lambda_1 = 2B - 2u_1 \quad (664.)$$

und aus (626.), wenn man $\alpha = -1$ und $n = 2$ setzt,

670. $\tau_1 = A^2 - 2\lambda_1 = A^2 - 4B + 4u_1$,

und endlich aus (644.)

671. $X_1 = \dfrac{A + \tau_1^{\frac{1}{2}}}{2}$, $X_2 = \dfrac{A - \tau_1^{\frac{1}{2}}}{2}$.

249.

Da nun $X_1 = x_1 + x_3$ ist (658.), so kann man [*nach* (§. 242.)] x_1 und x_3 als die beiden Wurzeln der Gleichung zweiter Ordnung

672. $x^2 - X_1 x + \varkappa = 0$ (647.)

der Gleichungen.

betrachten, und um x (647.) zu finden, darf man nur die gegebene Gleichung der vierten Ordnung durch die gegenwärtige Gleichung dividiren. Das erste Glied des Restes gleich Null gesetzt, giebt

$$673. \quad x = \frac{X_1^3 - AX_1^2 + BX_1 - C}{2X_1 - A}.$$

Löset man nun die Gleichung zweiter Ordnung (672.) auf, so erhält man

$$674. \; x_1 = \frac{X_1 + \sqrt{(X_1 - 4x)}}{2} \text{ und } x_3 = \frac{X_1 - \sqrt{(X_1^2 - 4x)}}{2}$$

und da $X_2 = x_2 + x_4$, so erhält man auch die Wurzeln x_2 und x_4, wenn man die Grössen X_1 und X_2 verwechselt, welches geschieht, wenn man in (671.) blos das Zeichen der Wurzel-Grösse $\tau^{\frac{1}{2}}$ vertauscht.

Diese Auflösung kommt mit der von Descartes überein, welche in Zerlegung der gegebenen Gleichung vierter Ordnung in zwei Gleichungen zweiter Ordnung mittelst einer andern Gleichung dritter Ordnung besteht.

250.

Man kann diese Ausdrücke noch vereinfachen, wenn man sogleich in (669.) aus (670.) $\frac{\tau - A^2 + 4B}{4}$ statt u setzt, welches die Gleichung

$$675. \quad \tau^3 - \tau^2(3A^2 - 8B) + \tau(3A^4 - 16A^2B + 16B^2 + 16AC - 64D) - (A^3 - 4AB + 8C)^2 = 0$$

giebt, von welcher eine beliebige Wurzel τ ist. Wen-

det man ihre drei Wurzeln an, so kann man sogleich die vier Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 finden.

Denn es sey $\alpha = -1$, so ist

$$676. \quad t = x_1 + x_3 - x_2 - x_4 \ (639.),$$

und folglich

$$677. \quad \tau = t^2 = (x_1 + x_3 - x_2 - x_4)^2.$$

Dieser Ausdruck von t^2 hat nur die drei verschiedenen Werthe

$$678. \begin{cases} (x_1 + x_3 - x_2 - x_4)^2 \\ (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 \\ (x_1 + x_4 - x_2 - x_3)^2, \end{cases}$$

welche folglich die drei Wurzeln der Gleichung in τ (675.) sind.

Bezeichnet man diese drei Wurzeln durch τ_1, τ_2, τ_3, so erhält man die drei Gleichungen

$$679. \begin{cases} \tau_1^{\frac{1}{2}} = x_1 + x_3 - x_2 - x_4 \\ \tau_2^{\frac{1}{2}} = x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\ \tau_3^{\frac{1}{2}} = x_1 + x_4 - x_2 - x_3, \end{cases}$$

welche, mit der Gleichung

$$680. \quad A = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$

für welche $\alpha = 1$ ist, verbunden, zur Bestimmung der vier Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 dienen. Man erhält

$$681. \begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(A + \tau_1^{\frac{1}{2}} + \tau_2^{\frac{1}{2}} + \tau_3^{\frac{1}{2}}) \\ x_2 = \frac{1}{4}(A - \tau_1^{\frac{1}{2}} + \tau_2^{\frac{1}{2}} - \tau_3^{\frac{1}{2}}) \\ x_3 = \frac{1}{4}(A + \tau_1^{\frac{1}{2}} - \tau_2^{\frac{1}{2}} - \tau_3^{\frac{1}{2}}) \\ x_4 = \frac{1}{4}(A - \tau_1^{\frac{1}{2}} - \tau_2^{\frac{1}{2}} + \tau_3^{\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

der Gleichungen.

251.

Diese Auflösung, die einfachste von allen, ist die Eulersche. Sie hat aber noch eine Zweideutigkeit, weil die Wurzelgrössen positiv und negativ genommen werden können. In der That erhält man, wenn man die Zeichen einer der Wurzel-Grössen, oder die Zeichen von allen dreien zugleich vertauscht, ein anderes System von Wurzeln, z. B.

$$682.\quad \begin{cases} x_1 = \tfrac{1}{4}(A - \tau_1^{\frac{1}{2}} - \tau_2^{\frac{1}{2}} - \tau_3^{\frac{1}{2}}) \\ x_2 = \tfrac{1}{4}(A + \tau_1^{\frac{1}{2}} - \tau_2^{\frac{1}{2}} + \tau_3^{\frac{1}{2}}) \\ x_3 = \tfrac{1}{4}(A - \tau_1^{\frac{1}{2}} + \tau_2^{\frac{1}{2}} + \tau_3^{\frac{1}{2}}) \\ x_4 = \tfrac{1}{4}(A + \tau_1^{\frac{1}{2}} + \tau_2^{\frac{1}{2}} - \tau_3^{\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

Aendert man dagegen nur die Zeichen von zwei Wurzel-Grössen, so hat man immer das nämliche System. Um daher zu erfahren, welches von beiden Systemen gilt, darf man nur das Zeichen des Products $\tau_1^{\frac{1}{2}}.\tau_2^{\frac{1}{2}}.\tau_3^{\frac{1}{2}}$ suchen.

Der Gleichung (675.) zu Folge, deren letztes Glied aus dem Product $\tau_1 \tau_2 \tau_3$ besteht, ist

$$683.\quad \tau_1.\tau_2.\tau_3 = (A^3 - 4AB + 8C)^2;$$

also, wenn man die Quadrat-Wurzel auszieht,

$$684.\quad \tau_1^{\frac{1}{2}}.\tau_2^{\frac{1}{2}}.\tau_3^{\frac{1}{2}} = \pm(A^3 - 4AB + 8C);$$

und wenn man die Werthe von $\tau_1^{\frac{1}{2}}$, $\tau_2^{\frac{1}{2}}$ und $\tau_3^{\frac{1}{2}}$ (679.) substituirt,

$$685.\quad (x_1 + x_3 - x_2 - x_4)(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 + x_4 - x_2 - x_3) = \pm(A^3 - 4AB + 8C).$$

Ueber die algebraische Auflösung

Um zu finden, welches Zeichen genommen werden müss, darf man nur irgend einen besondern Fall untersuchen, z. B. den Fall, wenn die drei Wurzeln x_2, x_3 und x_4 Null sind. In diesem Falle ist $A = x_1$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, und die Gleichung (685.) giebt

$$686. \quad x_1^3 = \pm A^3,$$

woraus folgt, dass man, um die Gleichung identisch zu machen, das obere Zeichen + nehmen muss. Es ist also nothwendig

$$687. \quad r_1^{\frac{1}{2}} . r_2^{\frac{1}{2}} . r_3^{\frac{1}{2}} = A^3 - 4AB + 8C,$$

und hieraus folgt, dass, wenn die Grösse

$$688. \quad A^3 - 4AB + 8C$$

positiv ist, das erste System der Wurzeln (681.), wenn sie negativ ist, das zweite System (682.) genommen werden muss; wobei die Wurzel-Grössen $r_1^{\frac{1}{2}}$, $r_2^{\frac{1}{2}}$, $r_3^{\frac{1}{2}}$ immer positiv sind.

252.

Bei Gleichungen von höherer als der vierten Ordnung führt das obige Verfahren, obgleich überall anwendbar, auf auflösende Gleichungen von höheren Graden als die gegebene Gleichung selbst.

Von Gleichungen des fünften Grades z. B. ist der allgemeine Ausdruck

$$689. \quad x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0.$$

Die Wurzeln der Gleichungen mögen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 seyn.

der Gleichungen.

Der Exponent m ist hier die Primzahl 5, und es ist [*zu Folge* (610.)]

690. $t = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \alpha^3 x_4 + \alpha^4 x_5$,

wo α eine der Wurzel der Gleichung $y^5 - 1 = 0$, ausser der Einheit, ist.

Man setze ferner

691. $t^5 = \tau$,

so erhält man eine Gleichung in τ vom Grade 1 . 2 . 3 . 4, die aber in 2 . 3 Gleichungen, jede vom vierten Grade zerlegt werden kann, so dass, wenn eine solche Gleichung des vierten Grades

692. $\tau^4 - T\tau^3 + U\tau^2 - X\tau + Y = 0$

ist, ihre Coefficienten $T, U\ldots$ jeder nur sechs verschiedene Werthe haben, welche durch die verschiedenen Permutationen der fünf Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 in jenen Coefficienten entstehen. Diese sechs Werthe hängen folglich von einer Gleichung des sechsten Grades ab, so dass am Ende die Auflösung der Gleichung des fünften Grades auf die Auflösung einer Gleichung des sechsten Grades gebracht seyn würde. Es ist daher unnütz, diese Rechnung zu unternehmen. Man findet den Anfang derselben in den Memoiren der Berliner Academie vom Jahre 1771. S. 130 etc.

253.

Wir haben bis jetzt die auflösenden Functionen nur von der Form

693. $x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 \ldots$

angenommen. Das obige Verfahren, direct die Glei-

chung zu finden, von welcher diese Functionen die Wurzeln sind, ist indessen auch auf jede andere beliebige Function der Wurzeln $x_1, x_2, x_3 \ldots$ der gegebenen Gleichung anwendbar. Man darf nur immer alle die verschiedenen Formen suchen, welche die gegebenen Functionen durch die Verwechselung von $x_1, x_2, x_3 \ldots$ unter einander annehmen können, und dann eine Gleichung aufstellen, welche diese verschiedenen Ausdrücke zu Wurzeln hat. Da die Coefficienten dieser Gleichungen unveränderliche [*oder symmetrische*] Functionen von ihren Wurzeln sind, so sind sie es auch von den Wurzeln der gegebenen Gleichung, und können also, vermittelst der Ausdrücke im zehnten Zusatze, durch rationale Functionen der Coefficienten der gegebenen Gleichung gefunden werden.

Man könnte glauben, dass verschiedene Functionen der Wurzeln einer und derselben Gleichung von verschiedenen Gleichungen abhangen müssen. Dieses ist zwar für nicht ähnliche Functionen der Fall, aber alle solche Functionen, welche wir ähnliche nennen, und welche die Eigenschaft haben, dass für eine und dieselbe Permutation entweder keine oder alle sich verändern, kann man von einer und derselben Gleichung abhängig machen, weil sie sich immer durch rationale Functionen von einer unter ihnen ausdrücken lassen.

Ich habe in den Memoiren der Academie von Berlin vom Jahre 1771. S. 203 etc. ein allgemeines Verfahren zur Bestimmung ähnlicher Functionen

der Gleichungen.

der Wurzeln einer beliebigen Gleichung gezeigt. Ich will dasselbe hier nicht hersetzen, um diesen Zusatz nicht zu sehr zu verlängern.

254.

Ich kann ihn aber nicht schliessen, ohne ein Wort von der schönen Untersuchung des seligen Vandermonde über die allgemeine Auflösung der Gleichungen in den Memoiren der Academie der Wissenschaften zu Paris vom Jahre 1771 zu sagen. Sein Werk und das meinige sind fast zu gleicher Zeit geschrieben und vorgelesen, das eine in der Pariser, das andere in der Berliner Academie. Vandermonde kam, von einem allgemeinen Satze ausgehend, auf ähnliche Resultate, auf welche mich die Untersuchung der verschiedenen, bis jetzt bekannten Methoden geführt hatte. Da die Vergleichung für die Analysis interessant ist, so wird man sie hier nicht ungern sehen.

Der erwähnte allgemeine Satz ist der, dass der analytische Ausdruck der Wurzeln einer Gleichung nothwendig eine solche Function dieser Wurzeln seyn muss, dass dadurch erstlich alle Wurzeln ohne Unterschied ausgedrückt werden können, und dann zweitens, dass die Function nur von der Summe der Wurzeln, der Summe ihrer Producte zu zweien, der Summe ihrer Producte zu dreien u. s. w. abhängt, damit sie blos aus den Coefficienten der gegebenen Gleichung zusammengesetzt seyn möge.

Ueber die algebraische Auflösung

255.

Nun bemerkt Vandermonde, indem er die Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades mit Rücksicht auf diesen Satz betrachtet, dass die Function, welche diese Auflösung enthält, von der Form

$$694. \quad \frac{a+b+\sqrt{(a-b)^2}}{2}$$

ist, wo a und b die beiden Wurzeln der gegebenen Gleichung sind. [*Nämlich, wenn die gegebene Gleichung* $x^2 - Ax + B = 0$ *ist und* a *und* b *die beiden Werthe von* x *sind, so ist bekanntlich* $a + b = A$ *und* $ab = B$. *Nun ist* $x = \frac{1}{2}A \pm \sqrt{(\frac{1}{4}A^2 - B)}$. *Substituirt man hierin* $A = a + b$ *und* $B = ab$, *so erhält man* $x = \frac{1}{2}(a+b) \pm \sqrt{(\frac{1}{4}(a+b)^2 - ab)}$, *oder* $x = \frac{a+b\pm\sqrt{(a-b)^2}}{2}$, *wie oben.*] Dieser Ausdruck giebt in der That, wegen des doppelten Zeichens der Wurzelgrösse, sowohl a als b [*denn* $\frac{a+b+\sqrt{(a-b)^2}}{2}$ *ist gleich* $\frac{a+b+a-b}{2} = a$ *und* $\frac{a+b-(a-b)}{2}$ *ist gleich* $\frac{a+b-a+b}{2} = b$]; zugleich aber können die beiden Grössen $a + b$ und $(a-b)^2$ durch die Coefficienten der Gleichung $x^2 - Ax + B = 0$ ausgedrückt werden, denn es ist

$$695. \quad \begin{cases} a+b = A \\ (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = (a+b)^2 - 4ab = A^2 - 4B, \end{cases}$$

woraus der bekannte Ausdruck

der Gleichungen.

$$696. \quad x = \frac{A + \sqrt{(A^2 - 4B)}}{2}$$

folgt.

Der Verfasser wendet nun den Satz auf Gleichungen des dritten Grades an und findet, dass die Functionen, welche ihre Auflösung enthält, auf die Form

$$697. \quad \frac{a+b+c+\sqrt[3]{(a+r_1b+r_2c)^3}+\sqrt[3]{(a+r_2b+r_1c)^3}}{3}$$

gebracht werden kann, wo a, b, c die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung und r_1, r_2 die Grössen sind, welche, nächst der Einheit, der Gleichung $r^3 - 1 = 0$ genugthun [*also die beiden unmöglichen dritten Wurzeln von* 1]. In der That giebt der Ausdruck zunächst a, weil $1 + r_1 + r_2 = 0$ ist. [*Er giebt nämlich, weil* $\sqrt[3]{(a+r_1b+r_2c)^3} = a+r_1b+r_2c$ *und* $\sqrt[3]{(a+r_2b+r_1c)^3} = a+r_2b+r_1c$ *ist, zusammen*

$$\frac{a+b+c+a+r_1b+r_2c+a+r_2b+r_1c}{2} =$$

$$\frac{3a+b(1+r_1+r_2)+c(1+r_1+r_2)}{3} = \frac{3a}{3} = a.]$$

Ferner giebt der Ausdruck, weil jede Cubic-Wurzel mit r_1 oder r_2 multiplicirt werden kann, auch b und c, wenn man die beiden Wurzelgrössen mit r_1 und r_2 oder mit r_2 und r_1 multiplicirt, weil $r_2 = r_1^2$ (§. 219.) [*z. B. die Grösse* (697.) *giebt, wenn man die Wurzel-Grössen mit* r_1 *und* r_2 *multiplicirt*

$$\tfrac{1}{3}(a+b+c+ar_1+br_1^2+r_1r_2c+ar_2+r_2^2b+r_1r_2c)$$
$$=\tfrac{1}{3}(a(1+r_1+r_2)+b(1+r_1^2+r_2^2)+c(1+r_1r_2+r_1r_2))$$

und weil $r_2 = r_1^2$, $1+r_1+r_2 = 0$, $1+r_2+r_2^2 = 0$

Ueber die algebraische Auflösung

und $1+2r_1r_2=1+2=3$ *ist, zusammen* $\frac{1}{3}c.3=c$. *Eben so* b.]

Daraus schliesst Vandermonde, dass die Function, welche zugleich a, b, c.... giebt, für eine beliebige Zahl von Wurzeln durch

$$698.\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{m}\,[a+b+c\ldots \\ +(a+r_1\,b+r_2\,c\ldots)^{\frac{1}{m}} \\ +(a+r_1^2\,b+r_2^2 c\ldots)^{\frac{1}{m}} \\ +(a+r_1^3\,b+r_2^3 c\ldots)^{\frac{1}{m}}\ \ldots] \end{array}\right.$$

ausgedrückt werden könne, wenn man die Wurzeln, welche die Einheit ausser 1 hat, durch r_1, r_2, r_3.... bezeichnet.

Vergleicht man diesen Ausdruck mit demjenigen der Wurzel x_1 (619. §. 230.), so wird man leicht die Uebereinstimmung bemerken, weil allgemein

$$699.\quad \tau=(x_1+\alpha x_2+\alpha^2 x_3\ldots)^m$$

ist (§. 15. und Gleichung 617.), τ_1, τ_2 *etc.* aber die Werthe von τ sind, welche den Wurzeln α, β, γ *etc.* der Gleichung $y^m-1=0$ entsprechen, die Vandermonde durch $r_1\,r_2\,r_3$.... bezeichnet, und wenn m eine Primzahl ist, alle Wurzeln gleichförmig durch 1, α, α^2, α^3.... und durch 1, β, β^2, β^3.... ausgedrückt werden (§. 219.).

Um die Werthe von $(a+r_1 b+r_2 c\ldots)^{\frac{1}{m}}$ (698.) durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung zu

finden, worin die ganze Schwierigkeit der Aufgabe besteht, bedient sich der Verfasser eines sinnreichen Algorithmus, der auf einer besondern Bezeichnung beruht. Er sucht nicht, wie eben geschehen, den Grad der Gleichung, von welcher diese Bestimmung abhängt, a priori, sondern er giebt die vollständige Auflösung der Gleichungen des dritten und vierten Grades, und für die Gleichungen des fünften und sechsten Grades allgemeine Ausdrücke, welche er Typen nennt, und welche zeigen, dass die Auflösung einer Gleichung des fünften Grades am Ende von einer Gleichung des sechsten Grades, diejenige des sechsten Grades von einer Gleichung des funfzehnten oder zehnten Grades abhängt; eben wie wir es oben fanden.

256.

Vandermonde hat auch die Vereinfachungen bemerkt, deren der allgemeine Ausdruck der Wurzeln einer Gleichung, deren Exponenten zusammengesetzte Zahlen sind, fähig ist. Er findet z. B., dass bei den Gleichungen des vierten Grades die Wurzeln a, b, c, d durch

700. $\frac{1}{4}(a+b+c+d+\sqrt{(a+b-c-d)^2}+\sqrt{(a+c-b-d)^2}+\sqrt{(a+d-b-c)^2})$

ausgedrückt werden können, wenn man die Wurzelgrössen positiv und negativ nimmt, und er findet daraus die obige Auflösung (§. 250.).

Da Vandermondes Verfahren von einem auf der Natur der Gleichungen gegründeten Satze aus-

Ueber die algebr. Auflösung der Gleich.

geht und in diesem Betrachte directer als das in diesem Zusatze gegebene ist, so kann man das gemeinschaftliche Resultat dieser beiden Verfahren für die allgemeine Auflösung der Gleichungen von höherm Grade als dem vierten, als nothwendige Folge aus der allgemeinen Theorie der Gleichungen betrachten.

Vierzehnter Zusatz,

welcher die allgemeine Auflösung der Gleichungen mit zwei Gliedern enthält.

257.

Obgleich die Gleichungen mit zwei Gliedern

$$701. \quad x^{\mu} - A = 0,$$

oder, weil man $xA^{\frac{1}{\mu}}$ setzen kann, einfacher

$$702. \quad x^{\mu} - 1 = 0$$

durch den Ausdruck

$$703. \quad x = \cos\frac{2\nu\pi}{\mu} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{2\nu\pi}{\mu},$$

in welchem man der Reihe nach 1, 2, 3 μ statt ν setzen muss, mit Hülfe der Sinus-Tafeln so genau aufgelöset werden können als man will [*man findet diesen Gegenstand ausführlich abgehandelt in der Schrift des Uebersetzers über Facultäten etc. Berlin bei Reimer* 1823. *S.* 347. *etc.*], so ist dennoch die algebraische Auflösung dieser Gleichungen für die Analysis nicht weniger interessant, und die Analysten haben sich lange damit beschäftigt.

Allgemeine Auflösung

Zuerst wurde die Schwierigkeit auf die Auflösung von Gleichungen reducirt, deren Exponenten Primzahlen sind, wie wir im Anfange des vorigen Zusatzes sahen. Man fand ferner, dass die Gleichung vom $\mu - 1$ten Grade

704. $x^{\mu-1} + x^{\mu-2} + x^{\mu-3} \ldots + 1 = 0,$

welche man erhält, wenn man die gegebene Gleichung $x^{\mu} - 1 = 0$, deren eine Wurzel allemal nothwendig 1 ist, durch $x - 1$ dividirt, weil diese Gleichung, da sie die nämliche bleibt, wenn man $\frac{1}{x}$ statt x setzt, eine **reciproke** Gleichung ist, in $\frac{\mu-1}{2}$ Gleichungen vom zweiten Grade von der Form

705. $x^2 - yx + 1 = 0$

zerlegt werden kann, wo y von einer Gleichung des $\frac{\mu-1}{2}$ten Grades von der Form

706. $y^{\nu} + y^{\nu-1} - (\nu-1)y^{\nu-2} - (\nu-2)y^{\nu-3} + \frac{(\nu-2)(\nu-3)}{2}y^{\nu-4} + \frac{(\nu-3)(\nu-4)}{2}y^{\nu-5} - \ldots = 0$

abhängt, und

707. $\nu = \frac{\mu-1}{2}$

ist; wie wir im zehnten Zusatze (§. 181.) sahen.

Hierdurch könnte man schon die Gleichung

$$x^7 - 1 = 0$$

auflösen, weil sie sich auf eine Gleichung des dritten Grades bringen lässt; aber die Auflösung der Gleichung

chung $x^{11} - 1 = 0$ war schon nicht mehr möglich, weil sich dieselbe nur auf eine Gleichung des fünften Grades bringen lässt.

258.

So weit war man, als Gauss im Jahre 1801 in seinem vortrefflichen Werke „disquisitiones arithmeticae“ [*es ist auch unter dem Titel: „Recherches arithmétiques“ ins Französiche übersetzt herausgekommen*] ein eben so originelles als sinnreiches Mittel zeigte, die Auflösung der Gleichung $x^\mu - 1$, wenn μ eine Primzahl ist, auf die Auflösung so vieler einzelner Gleichungen zu reduciren, als die Zahl $\mu - 1$ Factoren hat, deren Ordnungszahlen dann diese Factoren selbst sind. Auf diese Weise ist z. B. zur Auflösung der Gleichung $x^{13} - 1 = 0$ nur die Auflösung von zwei Gleichungen des zweiten und einer Gleichung des dritten Grades nöthig, weil $13 - 1 = 2 . 2 . 3$ ist. Die Gleichung $x^{17} - 1$ erfordert die Auflösung von vier Gleichungen des zweiten Grades u. s. w.

Wendet man aber die Gaussischen Sätze auf das Verfahren des vorigen Zusatzes an, so kann man auch, wie ich finde, jede Gleichung von zwei Gliedern, deren Ordnungs-Zahl eine Primzahl ist, ohne alle Hülfs-Gleichungen, und ohne Unbequemlichkeit von Seiten der Zweideutigkeit der Zeichen, direct auflösen.

Diese Auflösung soll der Gegenstand des gegenwärtigen Zusatzes seyn.

Allgemeine Auflösung

259.

Die aufzulösende Gleichung sey

$$708. \quad x^{\mu} - 1 = 0,$$

wo μ eine Primzahl ist. Sondert man davon die Wurzel 1 ab [*durch Division mit* $x - 1$], so erhät man die Gleichung vom $\mu - 1$ten Grade

$$709. \quad x^{\mu-1} + x^{\mu-2} + x^{\mu-3} \dots + 1 = 0.$$

Irgend eine Wurzel dieser Gleichung sey r, so lassen sich die $\mu - 1$ Wurzeln der Gleichung, wie wir in dem vorigen Zusatze (§. 219.) sahen, durch die geometrische Reihe

$$710. \quad r, r^2, r^3 \dots r^{\mu-1}$$

ausdrücken.

Nun hatte Gauss die sinnreiche und glückliche Idee, statt der arithmetischen Reihe der Exponenten von r eine geometrische Reihe zu nehmen, dem berühmten Lehrsatze von Fermat über die Primzahlen zu Folge.

Nach diesem Lehrsatze, von welchem zuerst Euler den Beweis gab, und der nachher auch von Allen, die sich mit der Theorie der Zahlen beschäftigten, bewiesen wurde, weiss man, dass, wenn μ eine Primzahl und a eine Zahl ist, die kleiner ist als μ: dass dann die Zahl $a^{\mu-1} - 1$ nothwendig mit μ aufgehen muss, so dass also der Rest, wenn man $a^{\mu-1}$ durch μ dividirt, 1 ist.

Euler bewies ferner, dass, wenn in der Reihe $a, a^2, a^3 \dots a^{\mu-1}$ auch noch andere Glieder sind,

von $x^m = 1$.

die mit μ dividirt, den Rest 1 lassen, die Exponenten dieser Glieder nothwendig in $\mu - 1$ aufgehen müssen, so dass man, wenn man wissen will, ob unter den Potenzen von a, mit kleinern Exponenten als $\mu - 1$, solche sind, die mit μ dividirt den Rest 1 geben, nur diejenigen versuchen darf, deren Exponenten Divisoren von $\mu - 1$ sind.

260.

Diejenigen Zahlen a, von welchen keine niedrigere Potenz, als $a^{\mu-1}$, wenn man sie mit μ dividirt, den Rest 1 giebt, nennt man primitive Wurzeln. Diese Wurzeln haben die Eigenschaft, dass alle Glieder der Reihe $a, a^2, a^3 \ldots . a^{\mu-1}$, durch μ dividirt, verschiedene Reste, und folglich alle mögliche Zahlen geben, die kleiner sind als μ, weil die Zahl dieser Reste $\mu - 1$ ist. Denn gäben z. B. zwei Potenzen a^n, a^p zwei gleiche Reste, so wäre ihre Differenz $a^n - a^p = a^p(a^{n-p} - 1)$, wenn n und $p < \mu$ sind, und $p < n$ ist, nothwendig durch μ theilbar. Da nun a nicht theilbar und μ eine Primzahl ist, so müsste $a^{n-p} - 1$ durch μ theilbar seyn; also müsste es eine Potenz a^{n-p}, die kleiner als a^μ ist, geben, welche den Rest 1 giebt, und a wäre folglich nicht eine primitive Wurzel; gegen die Voraussetzung.

Man kennt bis jetzt kein directes Mittel, die primitiven Wurzeln für jede Primzahl zu finden. Man findet sie indessen immer leicht durch Versuche. Euler hat in den Petersburger Commentarien, im

Allgemeine Auflösung

18ten Bande, ein Verzeichniss derselben für die Primzahlen bis 37 gegeben, welches wir hier hersetzen wollen

	μ	a
	3	2
	5	2, 3
	7	3, 5
	11	2, 6, 7, 8
711.	13	2, 6, 7, 11
	17	3, 5, 6, 7, 11, 12, 14
	19	2, 3, 10, 13, 14, 15
	23	5, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 20, 21
	29	2, 3, 8, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 21, 26, 27
	31	3, 11, 12, 13, 17, 21, 22, 24
	37	2, 5, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 24, 32, 35

wo leicht zu bemerken, dass die Zahl dieser primitiven Wurzeln für eine gegebene Primzahl μ immer gleich der Zahl derjenigen Zahlen ist, welche kleiner als μ und Primzahlen zu $\mu - 1$ sind [*z. B. für* $\mu = 29$ *ist* $\mu - 1 = 28$, *und Primzahlen zu* 28 *sind* 1, 3, 5, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 23, 25, 27. *Ihrer sind* 11. *Eben so viele primitive Wurzeln hat* 29].

Man sehe über diesen Gegenstand den dritten Abschnitt der „Disquisitiones arithmeticae."

Uebrigens ist es für unsern Gegenstand hinreichend, für eine gegebene Primzahl eine einzahlige primitive Wurzel zu können. Am vortheilhaftesten für die Rechnung ist die kleinste dieser Wurzeln.

von $x^m = 1$.

261.

Es sey nun a eine primitive Wurzel für die Primzahl μ, so dass $\mu - 1$ Glieder der geometrischen Reihe

$$a,\ a^2,\ a^3 \ldots\ldots a^{\mu-1},$$

durch μ dividirt, alle mögliche Zahlen von 1 bis μ zu Resten haben und der Rest der Division der letzten Zahl $a^{\mu-1}$ durch μ, 1 ist, so ist leicht zu sehen, dass die $\mu - 1$ Wurzeln $r,\ r^2,\ r^3 \ldots\ldots r^{\mu-1}$ (710.), der Gleichung (709.), abgesehen von der Aufeinanderfolge, durch

$$712.\quad r,\ r^a,\ r^{a^2},\ r^{a^3} \ldots\ldots r^{a^{\mu-1}}$$

ausgedrückt werden können. Denn da vermöge der Gleichung $x^\mu - 1 = 0$, von welcher r die Wurzel [*ausser* 1] seyn soll, $r^\mu = 1$ ist, so ist klar, dass man immer statt einer beliebigen Potenz von r, wie p^λ, wenn $\lambda > \mu$, eine Potenz r^ν annehmen kann, wo ν der Rest der Division von λ durch μ ist. [*Denn, wenn* $\lambda > \mu$, *so kann man immer* $\lambda = p\mu + r$ *setzen, wo* p *eine ganze Zahl ist, so dass* $r^\lambda = r^{p\mu+\nu} = r^{p\mu} . r^\nu$, *welches, weil* $r^\mu = 1$ *und folglich auch* $r^{p\mu} = 1$ *ist*, $r^\lambda = r^\nu$ *giebt.*] Man kann also in die obige Reihe (712.) statt des Exponenten von r immer die Reste setzen, welche sie geben, wenn man sie durch μ dividirt, und diese Reste sind, wie wir sahen, alle ganze Zahlen 1, 2, 3 $\mu - 1$, obgleich

Allgemeine Auflösung

in anderer als der natürlichen Ordnung, welches indessen für die Wurzeln r, r^2, r^3 gleichgültig ist.

Der Vortheil dieser neuen Form der Wurzeln besteht darin, dass man, wenn man in die Reihe derselben

713. $r, r^a, r^{a^2}, r^{a^3}, r^{a^4} \ldots\ldots r^{a^{\mu-2}}$

r^a statt r setzt, die Reihe

714. $r^a, r^{a^2}, r^{a^3}, r^{a^4}, r^{a^5} \ldots\ldots r,$

wenn man r^{a^2} statt r setzt, die Reihe

715. $r^{a^2}, r^{a^3}, r^{a^4}, r^{a^5}, r^{a^6} \ldots\ldots r, r^a$

erhält u. s. w.

In der That ist leicht zu sehen, dass, wenn man r^a statt r setzt, r^a in $(r^a)^a = r^{a^2}$, r^{a^2} in $(r^a)^{a^2} = r^{a^3}$ *etc.* und das letzte Glied $r^{a^{\mu-2}}$ in $(r^a)^{a^{\mu-2}} = r^{a^{\mu-1}} = r$ übergeht, weil der Rest der Division von $a^{\mu-1}$ durch μ gleich 1 ist.

Eben so geht, wenn man r^{a^2} statt r setzt, r^a in $(r^{a^2})^a = r^{a^3}$, r^{a^2} in $(r^{a^2})^{a^2} = r^{a^4}$ *etc.*, das vorletzte Glied $r^{a^{\mu-3}}$ in $(r^{a^2})^{a^{\mu-3}} = r^{a^{\mu-1}} = r$, das letzte Glied $r^{a^{\mu-2}}$ in $(r^{a^2})^{a^{\mu-2}} = r^{a^\mu} = r^2$ über, weil der Rest der Division von a^μ durch μ gleich a ist, indem $a^\mu = a \cdot a^{\mu-1}$ und der Rest der Division von $a^{\mu-1}$ durch μ gleich 1 ist.

von $x^m = 1$.

262.

Dieses vorausgeschickt, so wende man nun, um die Gleichung

716. $x^{\mu-1} + x^{\mu-2} + x^{\mu-3} \ldots + 1 = 0$ (709.)

aufzulösen, deren Wurzeln

717. $r, r^a, r^{a^2}, r^{a^3} \ldots r^{a^{\mu-2}}$

sind, weil, vermöge der Gleichung $x^\mu - 1 = 0$, $r^\mu = 1$ ist, das Verfahren des vorigen Zusatzes an, und setze also nach (§. 228.), indem man r, r^a, r^{a^2} *etc.* statt des dortigen $x_1, x_2, x_3 \ldots$ schreibt,

718. $t = r + \alpha r^a + \alpha^2 r^{a^2} + \alpha^3 r^{a^3} \ldots + \alpha^{\mu-2} r^{a^{\mu-2}}$ (614).

wo α eine der Wurzeln der Gleichung $y^{\mu-1} - 1 = 0$ [*ausser* 1] ist. Hierauf entwickele man [*um nach* (§. 229.) *den Ausdruck von* $\tau = t^{\mu-1}$ *zu finden*] die $\mu - 1$te Potenz von t, und zwar so, dass man immer die Potenzen von α und r, den Bedingungen $\alpha^{\mu-1} = 1$ und $r^\mu = 1$ gemäss, bis unter $\alpha^{\mu-1}$ und r^μ reducirt, so erhält man, wenn man diese Function nach Potenzen von α ordnet,

719. $\tau = t^{\mu-1} = \lambda_0 + \alpha\lambda_1 + \alpha^2\lambda_2 + \alpha^3\lambda_3 \ldots + \alpha^{\mu-2}\lambda_{\mu-2}$

(616.), wo nun $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \ldots$ rationale und ganze Functionen von r sind [*nämlich von den Wurzeln der Gleichung* $r, r^a, r^{a^2} \ldots$, *die alle von* r *abhangen*], welche Functionen die Eigenschaft haben, dass sie sich nicht verändern, wenn man r^a, r^{a^2},

Allgemeine Auflösung

r^{a^3} statt r setzt, weil wir in (§. 230.) sahen, dass sich dieselben, als Functionen von x_1, x_2, x_3 betrachtet, nicht verändern, wenn man x_1 mit x_2, x_2 mit x_3 *etc.*, oder x_1 mit x_3, x_2 mit x_4 *etc.* vertauscht, welche Vertauschungen hier diejenigen von r mit r^a mit r^{a^2} *etc.* sind (§. 261.).

263.

Nun ist klar, dass jede rationale und ganze Function von r, wenn $r^\mu = 1$ ist, immer auf die Form

720. $$A + Br + Cr^2 + Dr^3 \ldots + Nr^{\mu-1}$$

gebracht werden kann, wo die Coefficienten A, B, C gegebene und von r unabhängige Grössen sind. Es lässt sich selbst zeigen, dass jede blos rationale Function von r auf diese Form gebracht werden kann; denn hat dieselbe einen Nenner, so kann man diesen, wie wir in (§. 104.) sahen, durch Multiplication mit einem angemessenen Polynom von r wegschaffen.

Da nun aber in unserm gegenwärtigen Falle die Potenzen r, r^2, r^3 $r^{\mu-1}$ auch, obgleich in anderer Ordnung, durch r^a, r^{a^2}, r^{a^3} $r^{a^{\mu-2}}$ ausgedrückt werden können, so lässt sich jede rationale Function von r auch auf die Form

721. $$A + Br + Cr^a + Dr^{a^2} + Er^{a^3} \ldots + Nr^{a^{\mu-2}}$$

bringen, wo A, B, C von r unabhängige Coefficienten sind.

von $x^m = 1$.

Soll nun diese Function von der Art seyn, dass sie die nämliche bleibt, wenn man r^a statt r setzt, so muss die Grösse

722. $A + Br^a + Cr^{a^2} + Dr^{a^3} + Er^{a^4} \ldots + Nr$,

welche man erhält, wenn man in (721.) r^a statt r setzt, weil das letzte Glied $r^{a^{\mu-2}}$ in $r^{a^{\mu-1}}$ oder r übergeht, indem $r^\mu = 1$ ist, und $a^{\mu-1}$ durch μ dividirt, den Rest 1 giebt, der vorigen Grösse (721.) gleich seyn. Daraus folgt

723. $[A + Br + Cr^a + Dr^{a^2} \ldots + Nr^{a^{\mu-2}}$

$= A + Nr + Br^a + Cr^{a^2} \ldots + Mr^{a^{\mu-2}}$ *und*]

724. $B = C,\ C = D,\ D = E \ldots\ N = B$,

wodurch sich die Grösse (721.) auf

725. $A + B(r + r^a + r^{a^2} + r^{a^3} \ldots + r^{a^{\mu-2}})$

reducirt.

[*Der Schluss, dass die Gleichungen* (724.) *aus den Gleichungen* (723.) *folgen, scheint einige Schwierigkeit zu haben. Er findet nur Statt, wenn* $A, B, C \ldots$ *von* r *völlig unabhängig sind, und wenn* r *unter allen seinen Werthen auch den Werth* 0 *haben kann. Beides scheint nicht der Fall zu seyn. Wie nämlich sogleich weiter unten folgt, sollen die Ausdrücke* (721. 722. 725.) *diejenigen der Grössen* $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \ldots$ (719.) *seyn. Diese Grössen hangen von* r, a *und bestimmten Zahlen, also von* r *und* μ *ab, weil* $t = \lambda_0 + \alpha\lambda_1 + \alpha^2\lambda_2 \ldots$ *gleich* $t^{\mu-1} = (r + \alpha r^a + \alpha^2 r^{a^2} \ldots)^{\mu-1}$

Allgemeine Auflösung

ist; folglich hangen die Coefficienten A, B, C etc. von μ ab. r, als eine der Wurzeln der Gleichung $x^\mu = 1$, ist aber nicht von μ unabhängig; also scheinen auch die Coefficienten A, B, C.... nicht von r unabhängig zu seyn. Eben so hat auch r nur $\mu - 1$ verschiedene bestimmte Werthe und unter diesen den Werth Null nicht. Es scheint also aus (723.) nicht zu folgen, dass die Gleichungen (724.) Statt finden müssen, sondern nur, dass sie Statt finden können.]

264.

Bezeichnet man nun die Summe der Wurzeln r, r^2, r^3.... durch s, so ist auch eben so wohl

726. $s = r + r^a + r^{a^2} + r^{a^3} \ldots + r^{a^{\mu-2}}$,

und die Grössen λ_0, λ_1, λ_2.... in der Function τ (719.) sind alle von der Form

727. $A + Bs$.

Die Coefficienten A und B lassen sich durch die wirkliche Entwickelung der Function $\tau = t^{\mu-1}$ (719.) finden, die Grösse s aber aus der aufzulösenden Gleichung

$$x^{\mu-1} + x^{\mu-2} + x^{\mu-3} \ldots + 1 = 0 \quad (716.),$$

welche auf der Stelle

728. $s = -1$

giebt. [*Denn s soll gleich $r + r^2 + r^3$.... seyn und r bezeichnet die verschiedenen Werthe von x, also ist auch $s = x + x^2 + x^3$...., folglich, weil die*

von $x^m = 1$.

aufzulösende Gleichung $1 + x + x^2 + x^3 \ldots\ldots + x^{\mu-1} = 0$, *und also* $x + x^2 + x^3 \ldots\ldots + x^{\mu-1} = -1$ *ist*, $s = -1$.]

Hier also ist ein Fall, wo die Werthe der Grössen λ_0, λ_1, $\lambda_2 \ldots\ldots$ unmittelbar bekannt sind, ohne von irgend einer Gleichung abzuhangen, so dass man, wenn man durch 1, α, β, $\gamma \ldots\ldots$ die $\mu - 1$ Wurzeln der Gleichung $y^{\mu-1} - 1 = 0$, und durch τ_0, τ_1, τ_2, $\tau_3 \ldots\ldots$ die Werthe von τ bezeichnet, welche aus der Substitution dieser Wurzeln statt α entstehen, vermöge der Ausdrücke in (§. 230.) [*namentlich* (619.)] wenn man r statt x und $\mu - 1$ statt m setzt, auf der Stelle

$$729. \quad r = \frac{\tau_0^{\frac{1}{\mu-1}} + \tau_1^{\frac{1}{\mu-1}} + \tau_2^{\frac{1}{\mu-1}} \ldots\ldots + \tau_{\mu-1}^{\frac{1}{\mu-1}}}{\mu - 1}$$

findet.

[*Durch die wirkliche Entwickelung der* $\mu-1$*ten Potenz von* $t = r + \alpha r^a + \alpha^2 r^{a^2} + \alpha^3 r^{a^3} \ldots\ldots + \alpha^{\mu-2} r^{a^{\mu-2}}$ (718.) *nämlich findet man* $\tau = \lambda_0 + \alpha\lambda_1 + \alpha^2\lambda_2 \ldots\ldots \alpha^{\mu-2}\lambda_{\mu-2}$, *von welcher Grösse oben behauptet wurde, dass sie immer von der Form* $A + B(r + r^a + r^{a^2} + r^{a^3} \ldots\ldots r^{a^{\mu-2}})$, *oder* $A + Bs$, *oder* $A - B$, *also* $\tau = A - B$ *sey, weil* $s = -1$ *ist. Setzt man in die Werthe der Grössen* A *und* B, *welche nur von* α *abhangen, welches die Wurzel der Gleichung* $y^{\mu-1} - 1 = 0$ *ist, die verschiedenen Werthe, welche diese Wurzel*

Allgemeine Aufløsung

haben kann, so erhält man die durch τ_0, τ_1, τ_2.... bezeichneten verschiedenen Werthe der Grösse τ, welche dann, zu Folge (729.), die eine Wurzel r der gegebenen Gleichung $x^\mu - 1 = 0$ geben.]

Dieses ist der Ausdruck einer der Wurzeln der Gleichung $x^\mu - 1 = 0$. Man findet auch alle übrigen, wenn man die Potenzen von r, nämlich r^2, r^3.... $r^{\mu-1}$ nimmt. Auch kann man dieselben unmittelbar finden, wenn man in (620. 621.) r^a statt x_2, r^{a^2} statt x_3 *etc.* setzt. Dieses giebt

730. $$\begin{cases} r^a = \dfrac{\tau_0^{\frac{1}{\mu-1}} + \alpha^{\mu-2}\tau_1^{\frac{1}{\mu-1}} + \beta^{\mu-2}\tau_2^{\frac{1}{\mu-1}}}{\mu-1}\cdots\cdot \\[2ex] r^{a^2} = \dfrac{\tau_0^{\frac{1}{\mu-1}} + \alpha^{\mu-3}\tau_1^{\frac{1}{\mu-1}} + \beta^{\mu-3}\tau_2^{\frac{1}{\mu-1}}}{\mu-1}\cdots\cdot \end{cases}$$

etc.

265.

Man kann auch, wenn man will, die Berechnung der Grössen λ_0 und τ_0 ersparen; denn zu Folge (§. 231.) ist das Glied $\tau_0^{\frac{1}{\mu-1}}$ (hier nämlich ist $m = \mu - 1$) nur der Summe der Wurzeln gleich, welche wir im Allgemeinen durch s bezeichnen [*dort A*], und der Ausdruck von τ lässt sich auf die Form

731. $\tau = s^{\mu-1} + (\alpha - 1)\lambda_1 + (\alpha^2 - 1)\lambda_2 + (\alpha^3 - 1)\lambda_3 \ldots$ (626.)

bringen, worin λ_0 nicht vorkommt. Man darf hierin nur α, β, γ *etc.* statt α setzen, um die Werthe von

von $x^m = 1$.

$r_1, r_2, r_3 \ldots$ [*für die Ausdrücke* (729. *und* 730.)] zu finden.

Auf diese Weise hängt also nun die Auflösung der Gleichung $x^\mu - 1 = 0$ nur noch von der Auflösung der Gleichung $y^{\mu-1} - 1 = 0$ ab, von welcher $1, \alpha, \beta, \gamma \ldots$ die Wurzeln sind. Diese aber ist nicht allein um einen Grad niedriger als die gegebene, sondern weil $\mu - 1$ nothwendig eine zusammengesetzte Zahl ist, so erhält man durch die Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ auch diejenigen von so vielen Gleichungen $y^\varrho - 1 = 0$, als die Zahl $\mu - 1$ Factoren ϱ hat, wie zu Folge (§. 226.).

266.

Es sey z. B. die Gleichung

$$732.\quad x^5 - 1 = 0$$

gegeben, deren Wurzeln man sucht. Da diese Gleichung durch die gewöhnliche Methode auflösbar ist, so kann man die gewöhnliche Auflösung mit der obigen vergleichen.

Dividirt man zuerst durch $x - 1$, so erhält man die Gleichung des vierten Grades

$$733.\quad x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

deren Wurzeln r, r^2, r^3, r^4 sind.

Da hier hier $\mu = 5$, so ist zu Folge der obigen Tafel der primitiven Wurzeln (711.) die kleinste primitive Wurzel 2, so dass hier

$$734.\quad a = 2$$

und folglich die Wurzeln durch r, r^2, r^{2^2}, r^{2^3} [*also*

Allgemeine Auflösung

durch r, r^2, r^4, r^8] ausgedrückt werden können, welche sich wegen $r^5 = 1$ auf r, r^2, r^4 und r^3 reduciren, wenn man statt des Exponenten $2^3 = 8$ den Rest der Division desselben mit 5 nimmt.

Man setze also

$$735. \quad t = r + \alpha r^2 + \alpha^2 r^4 + \alpha^3 r^3 \quad (718.),$$

wo nun α eine der Wurzeln der Gleichung $y^4 - 1 = 0$ ist, so dass

$$736. \quad \alpha^4 = 1.$$

Um die Function τ zu finden, darf man nur das Polynom t (735.) zur vierten Potenz erheben und nach Potenzen von α entwickeln, welche man zugleich überall bis auf Potenzen, die niedriger sind als die vierte, und die Potenzen von r auf Potenzen von r unter der fünften reduciren kann, weil $\alpha^4 = 1$ und $r^5 = 1$ ist. Diese Rechnung, welche weiter keine Schwierigkeit hat, giebt

$$737. \quad \tau = \lambda_0 + \alpha\lambda_1 + \alpha^2\lambda_2 + \alpha^3\lambda_3,$$

wo λ_0, λ_1, λ_2, λ_3, wenn man die Summe der Wurzeln r, r^2, r^3, r^4 [*wie oben*] durch s bezeichnet, folgende Werthe haben

$$738. \quad \begin{cases} \lambda_0 = 12 + 13s \\ \lambda_1 = 16 + 12s \\ \lambda_2 = 24 + 11s \\ \lambda_3 = 16s. \end{cases}$$

[*Also sind in diesem Beispiele wirklich alle die Grössen* λ_0, λ_1, λ_2 *etc. von der Form* $A + Bs$, *was in* (§. 264.) *allgemein behauptet wurde. Hier hat der Satz gar keine Schwierigkeit, weil eine*

von $x^m = 1$.

wirkliche Berechnung das Resultat giebt. Ein allgemeiner Beweis, gegen welchen die obigen Einwendungen nicht Statt finden, scheint aber noch nöthig.]

Da nun $s = -1$ (728.), vermöge der Gleichung in x, so ist [*in* 738.]

$$739. \begin{cases} \lambda_0 = -1 \\ \lambda_1 = +4 \\ \lambda_2 = +14 \\ \lambda_3 = -16 \end{cases}$$

und folglich in (737.)

$$740. \quad \tau = -1 + 4\alpha + 14\alpha^2 - 16\alpha^3$$

Nun lässt sich die Gleichung $y^4 - 1 = 0$ in die beiden Gleichungen $y^2 - 1 = 0$ und $y^2 + 1 = 0$ zerlegen, welches auf der Stelle $y = +1, -1, \sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ giebt, welche vier Werthe von y man der Reihe nach in (740.) statt α setzen muss, um die Werthe von $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ zu finden.

Dieses giebt

$$741. \begin{cases} \tau_0 = 1 \\ \tau_1 = 25 \\ \tau_2 = -15 + 20\sqrt{-1} \\ \tau_3 = -15 - 20\sqrt{-1}. \end{cases}$$

Substituirt man diese Werthe von $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ in den Ausdruck von r (729.) und setzt zugleich $s = -1$, statt $\tau_0^{\frac{1}{4}}$ (§. 265.), so erhält man

$$742. \quad r = \frac{-1 + \sqrt{5} + \sqrt[4]{(-15 + 20\sqrt{-1})} + \sqrt[4]{(-15 - 20\sqrt{-1})}}{4}$$

[*welches eine der fünften Wurzeln von* 1 *ist*].

Allgemeine Auflösung

267.

Es lässt sich auch durch das Verfahren von (§. 239.) noch ein einfacherer Ausdruck dieser Wurzel r finden. Dieses Verfahren ist auf Gleichungen, wie die gegenwärtige, immer anwendbar, weil der Exponent $\mu - 1$ nothwendig eine zusammengesetzte Zahl ist.

Wir wollen allgemein

$$743. \quad \mu - 1 = \nu \varrho$$

setzen und für α eine der Wurzeln der Gleichung $y^\nu - 1 = 0$ nehmen, so nimmt die Function t (718.) folgende Form an:

$$744. \quad t = X_1 + \alpha X_2 + \alpha^2 X_3 \ldots + \alpha^{\nu-1} X_\nu \quad (640.),$$

wo

$$745. \quad \left\{\begin{array}{l} X_1 = r + r^{a^\nu} + r^{a^{2\nu}} + r^{a^{3\nu}} \ldots + r^{a^{(\varrho-1)\nu}} \\ X_2 = \\ r^a + r^{a^{\nu+1}} + r^{a^{2\nu+1}} + r^{a^{3\nu+1}} \ldots + r^{a^{(\varrho-1)\nu+1}} \\ X_3 = \\ r^{a^2} + r^{a^{\nu+2}} + r^{a^{2\nu+2}} + r^{a^{3\nu+2}} \ldots + r^{a^{(\varrho-1)\nu+2}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_\nu = r^{a^{\nu-1}} + r^{a^{2\nu-1}} + r^{a^{3\nu-1}} + r^{a^{4\nu-1}} \ldots + r^{a^{\varrho\nu-1}} \end{array}\right\} (641.)$$

Hierauf setze man die Function $\tau = t^\nu$ zusammen, welche, weil $\alpha^\nu = 1$ ist, die Form

$$746. \quad \lambda_0 + \alpha\lambda_1 + \alpha^2\lambda_2 + \alpha^3\lambda_3 \ldots + \alpha^{\nu-1}\lambda_{\nu-1}$$

und die Eigenschaft hat, dass die Grössen λ_0, λ_1

$\lambda_2 \ldots$

von $x^m = 1$.

$\lambda_2 \ldots$ Functionen von X_1, X_2, $X_3 \ldots$ sind, welche sich nicht verändern, wenn man X_2 statt X_1, X_3 statt X_2, X_4 statt $X_3 \ldots X_\nu$ statt X_1 setzt.

Nun sieht man aus den Ausdrücken (745.), dass wenn man r^a statt r setzt, X_1 in X_2, X_2 in X_3 *etc.* X_ν in X_1 übergeht. X_ν nämlich geht alsdann in $r^{a^\nu} + r^{a^{2\nu}} + r^{a^{3\nu}} \ldots + r^{a^{\varrho\nu}}$, oder, weil $\varrho\nu = \mu - 1$ ist (743.), zu Folge (261.) in $r + r^{a^\nu} + r^{a^{2\nu}} + r^{a^{3\nu}} \ldots + r^{a^{(\varrho-1)\nu}}$ über [*welches wieder* X_1 *ist*].

Die Grössen λ_0, λ_1, $\lambda_2 \ldots$ müssen also solche Functionen von r seyn, welche die nämlichen bleiben, wenn man r^a statt r setzt, weshalb sie zu Folge (§. 263.) nur von der Form $A + Bs$ seyn können [*hierbei kommt die Bemerkung in (§. 263.) in Betracht*], wo A und B Coefficienten sind, welche sich bei der Entwickelung der Grössen finden, s aber die Summe der Wurzeln $r, r^a, r^{a^2}, r^{a^3} \ldots r^{a^{\mu-2}}$ ist, welche vermöge der gegebenen Gleichung -1 ist, so dass die Grössen λ_0, λ_1, $\lambda_2 \ldots$, wie in (§. 266.) ganz gegeben sind. Man erhält folglich vermittelst der Ausdrücke (644. §. 239.), wenn man darin ν statt n, und s, die Summe der Wurzeln, statt des Gliedes $\tau_0^{\frac{1}{\nu}}$ setzt,

$$X_1 = \frac{s + \tau_1^{\frac{1}{\nu}} + \tau_2^{\frac{1}{\nu}} \ldots}{\nu}$$

Allgemeine Auflösung

$$747.\begin{cases} X_2 = \dfrac{s + \alpha^{\nu-1}\tau_1^{\frac{1}{\nu}} + \beta^{\nu-1}\tau_2^{\frac{1}{\nu}} \ldots\ldots}{\nu} \\ X_3 = \dfrac{s + \alpha^{\nu-2}\tau_1^{\frac{1}{\nu}} + \beta^{\nu-2}\tau_2^{\frac{1}{\nu}} \ldots\ldots}{\nu} \end{cases}$$

. .

In diesem Ausdrucke sind α, β, $\gamma \ldots\ldots$ die Wurzelu der Gleichung $y^\nu - 1 = 0$, ausser der Einheit, und τ_1, τ_2, $\tau_3 \ldots\ldots$ sind die Werthe von τ, welche man erhält, wenn man α, β, $\gamma \ldots\ldots$ statt α setzt.

Der Werth von λ_0 ist nicht zu berechnen nöthig, wenn man sich des Ausdrucks von τ (731.) bedient, welcher hier

$$748.\ \tau = s^\nu + (\alpha - 1)\lambda_1 + (\alpha^2 - 1)\lambda_2 + (\alpha^3 - 1)\lambda_3 \ldots\ldots$$

ist.

268.

Der Fall, wenn

$$749.\ \nu = \frac{\mu - 1}{2}$$

ist, verdient einer besondern Erwähnung, weil derselbe die Theilung des Kreis-Umfanges in μ Theile betrifft.

Wenn nämlich $\nu = \frac{\mu - 1}{2}$, und folglich [$\mu - 1 = 2\nu$, *mithin in* (743.)]

$$750.\ \varrho = 2,$$

so ist in (745.)

$$751.\ X_1 = r + r^{a^{\frac{\mu-1}{2}}}.$$

von $x^m = 1$.

Da nun aber $a^{\mu-1} - 1$ durch μ theilbar ist und a eine primitive Wurzel seyn soll, so ist $a^{\frac{\mu-1}{2}} - 1$ nicht durch μ theilbar. Dagegen ist, weil $a^{\mu-1} - 1 = (a^{\frac{\mu-1}{2}} - 1)(a^{\frac{\mu-1}{2}} + 1)$, und μ eine Primzahl ist, $a^{\frac{\mu-1}{2}} + 1$ durch μ theilbar; folglich ist der Rest der Division von $a^{\frac{\mu-1}{2}}$ durch μ, gleich -1; mithin ist

$$752. \quad r^{a^{\frac{\mu-1}{2}}} = \frac{1}{r}.$$

Also ist [*zu Folge* (751.)]

$$753. \begin{cases} X_1 = r + \frac{1}{r} \\ X_2 = r^a + \frac{1}{r^a} \\ X_3 = r^{a^2} + \frac{1}{r^{a^2}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Nun ist, nach dem Cotesischen Lehrsatze,

$$754. \quad r = \cos\frac{2\pi}{\mu} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{\mu},$$

und allgemein

$$755. \quad r^m = \cos\frac{2m\pi}{\mu} + \sqrt{-1}\sin\frac{2m\pi}{\mu};$$

also ist

$$756. \begin{cases} X_1 = 2\cos\frac{2\pi}{\mu} \\ X_2 = 2\cos\frac{2a\pi}{\mu} \\ X_3 = 2\cos\frac{2a^2\pi}{\mu} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Allgemeine Auflösung

[*Es ist nämlich* $r = \cos\frac{2\pi}{\mu} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{\mu}$, *und nach* (755.), *wenn man* $m = -1$ *setzt*, $\frac{1}{r} = \cos\frac{2\pi}{\mu} - \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{\mu}$, *also zu Folge* (753.) $r + \frac{1}{r}$ *oder* $X_1 = 2\cos\frac{2\pi}{\mu}$. *Eben so findet man* X_2, X_3 *etc.*]

Die Werthe von $X_1, X_2, X_3 \ldots$ sind also in diesem Falle ganz reell und geben unmittelbar den μten Theil des Kreis-Umfanges.

269.

Nachdem in (§. 267.) die Wurzeln X_1, X_2, $X_3 \ldots$ durch die Ausdrücke (747) gefunden sind, müsste man die Rechnung auf die nämliche Weise fortsetzen, um zu der νten Wurzel zu gelangen. Man betrachte also die ϱ Wurzeln, aus welchen X_1 zusammengesetzt ist (641.), als die Wurzeln einer Gleichung vom Grade ϱ, und substituire sie statt x_1, x_2, $x_3 \ldots x_\varrho$ in den allgemeinen Ausdruck von t (617.), so erhält man

$$757.\quad t_1 = r + \alpha r^{a^\nu} + \alpha^2 r^{a^{2\nu}} + \alpha^3 r^{a^{3\nu}} \ldots \alpha^{\varrho-1} r^{a^{(\varrho-1)\nu}},$$

wo α irgend eine Wurzel der Gleichung $y^\varrho - 1 = 0$ ist. Daraus folgt, weil $\alpha^\varrho = 1$,

$$758.\quad \tau_1 = t_1^\varrho = \lambda_{0,} + \alpha\lambda_{1,} + \alpha^2\lambda_{2,} \ldots + \alpha^{\varrho-1}\lambda_{\varrho-1,},$$

wenn man rechterhand, unten, den Grössen einen Strich beisetzt, um sie von den Grössen t, τ, λ *etc.* zu unterscheiden.

Da die Grössen $\lambda_{0,}$, $\lambda_{1,}$, $\lambda_{2,} \ldots$ im Allgemeinen

von $x^m = 1$.

Functionen von x_1, x_2, x_3 sind, die sich nicht verändern, wenn man x_1 mit x_2, x_2 mit x_3 *etc.* x_ϱ mit x_1 verwechselt (§. 230.), so sind dieselben hier Functionen von r, die sich nicht verändern, wenn man r^{a^ν} statt r setzt, weil hierdurch die Wurzeln r, r^{a^ν}, $r^{a^{2\nu}}$ $r^{a^{(\varrho-1)\nu}}$ in r^{a^ν}, $r^{a^{2\nu}}$, $r^{a^{3\nu}}$ r übergehen.

Nun ist durch ein ähnliches Verfahren wie in (§. 264.) leicht zu zeigen, dass jede rationale Function von r, welche sich nicht verändert, wenn man r^{a^ν} statt r setzt, nothwendig die Form

759. $A + BX_1 + CX_2 + DX_3 + HX_\nu$

haben muss, wenn man die Ausdrücke von X_1, X_2, X_3 (§. 267.) beibehält.

Denn zuerst lässt sich jede rationale Function von r auf die Form

760. $A + Br + Cr^a + Dr^{a^2} + Er^{a^3} + Nr^{a^{\mu-1}}$

bringen (§. 263.), und damit dergleichen Functionen die nämlichen bleiben, wenn man r^{a^ν} statt r setzt, müssen die Coefficienten der Glieder mit r^{a^ν}, $r^{a^{2\nu}}$, $r^{a^{3\nu}}$ denen mit r, die Coefficienten der Glieder mit $r^{a^{\nu+1}}$, $r^{a^{2\nu+1}}$, $r^{a^{3\nu+1}}$ *etc.* denen mit r^a, die Coefficienten der Glieder mit $r^{a^{\nu+2}}$, $r^{a^{2\nu+2}}$, $r^{a^{3\nu+2}}$ *etc.* denen mit r^{a^2} gleich seyn u. s. w. [*mit Rücksicht auf die Bemerkung* (§. 263.)], wodurch

sich die Function auf die Form (759.) reduciret. In der That sieht man, dass alle die Grössen X_1, X_2, X_3 X_ν die nämlichen bleiben, wenn man r^{a^ν} statt r setzt; denn das letzte Glied $r^{a^{(\varrho-1)\nu}}$ von X_1 geht in $r^{a^{\varrho\nu}} = r^{a^{\mu-1}} = r$ über, das letzte Glied $r^{a^{(\varrho-1)\nu+1}}$ von X_2 in $r^{a^{\varrho\nu+1}} = r^a$ u. s. w.

270.

Alle die Grössen λ_0, λ_1, λ_2 nehmen also, wenn man sie entwickelt, die Form

$$761. \quad A + BX_1 + CX_2 + DX_3 \ldots\ldots$$

an, und haben folglich bekannte Werthe. Mithin ist auch der Werth von τ (758.) bekannt, und man erhält τ_1, τ_2, τ_3, wenn man darin statt α die $\varrho-1$ Grössen α, β, γ setzt, welche, nebst der Einheit, die Wurzeln der Gleichung $y^\varrho - 1 = 0$ sind. Hierauf erhält man für r einen ähnlichen Ausdruck, wie (729. §. 264.), wenn man ϱ statt $\mu - 1$ und die Summe der Wurzeln X_1 statt $\tau_0^{\frac{1}{\varrho}}$ setzt. Dieses giebt

$$762. \quad r = \frac{X_1 + \tau_1^{\frac{1}{\varrho}} + \tau_2^{\frac{1}{\varrho}} + \tau_3^{\frac{1}{\varrho}} \ldots\ldots}{\varrho}.$$

271.

Man kann auch, wenn man will, die Ausdrücke der andern Wurzeln r^{a^ν}, $r^{a^{2\nu}}$, $r^{a^{3\nu}}$ finden, aus welchen die Function X_1 (747. §. 267.) zusammen-

von $x^m = 1$.

gesetzt ist, wenn man in dem Ausdrucke von r (762.) die Wurzelgrössen $\tau_1^{\frac{1}{\varrho}}$, $\tau_2^{\frac{1}{\varrho}}$, der Reihe nach, erst mit $\alpha^{\varrho-1}$, $\beta^{\varrho-1}$, dann mit $\alpha^{\varrho-2}$, $\beta^{\varrho-2}$ *etc.* multiplicirt [*wie* (730.)].

Man könnte selbst ohne weitere Rechnung die Wurzeln r^a, $r^{a^{\nu+1}}$ *etc.* finden, aus welchen die Function X_2 zusammengesetzt ist, blos dadurch, dass man r^a statt r setzt, weil dadurch X_1 in X_2, X_2 in X_3 *etc.* übergeht, so dass man also nur in den allgemeinen Ausdruck von τ (758.) blos X_2 statt X_1, X_3 statt X_2 X_1 statt X_ν setzen darf.

Da X_1 in X_2, X_2 in X_4 *etc.* übergeht, wenn man r^{a^2} statt r setzt, so kann man auch auf dieselbe Weise aus dem Ausdrucke der Wurzeln, aus welchen X_1 zusammengesetzt ist, die Ausdrücke der Wurzeln in X_3 finden, wenn man in den allgemeinen Ausdruck von τ, X_3 statt X_1, X_4 statt X_2 X_1 statt $X_{\nu-1}$, X_2 statt X_ν setzt u. s. w.

272.

Ist ϱ keine Primzahl, so kann man, wenn man sie in ihre Factoren zerlegt, die obige Operation noch in einfachere zerlegen.

Wäre z. B.

$$763. \quad \varrho = \nu, \varrho_1,$$

so könnte man für α nur eine Wurzel der Gleichung

$$764. \quad y^{\nu} - 1 = 0$$

Allgemeine Auflösung

nehmen, so dass

$$765. \quad a^{\nu,} = 1$$

wäre. Alsdann ist in (744. §. 267.)

$$766. \quad t_1 = X_{1,} + \alpha X_{2,} + \alpha^2 X_{3,} \dots + \alpha^{\nu,-1} X_{\nu,},$$

wenn man

$$767. \begin{cases} X_{1,} = r + r^{a^{\nu,\nu}} + r^{a^{2\nu,\nu}} + r^{a^{3\nu,\nu}} \dots + r^{a^{(\varrho-\nu,)\nu}} \\ X_{2,} = r^{a^{\nu,}} + r^{a^{(\nu,+1)\nu}} + r^{a^{(2\nu,+1)\nu}} \dots + r^{a^{(\varrho-\nu,+1)\nu}} \\ X_{3,} = r^{a^{2\nu,}} + r^{a^{(2\nu,+2)\nu}} + r^{a^{(3\nu,+2)\nu}} \dots + r^{a^{(\varrho-\nu,+2)\nu}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_{\nu,} = r^{a^{(\nu,-1)\nu}} + r^{a^{(2\nu,-1)\nu}} + r^{a^{(3\nu,-1)\nu}} \dots + r^{a^{(\varrho-1)\nu}} \end{cases}$$

setzt. Hierauf setze man

$$768. \quad \tau_1 = t_1^{\nu,}.$$

Entwickelt man darauf den Ausdruck von τ in die Form

$$769. \quad \tau_1 = \lambda_{0,} + \alpha\lambda_{1,} + \alpha^2\lambda_{2,} \dots + \alpha^{\nu,-1}\lambda_{1\nu,},$$

wo $a^{\nu,} = 1$, so sind die Grössen $\lambda_{0,}$, $\lambda_{1,}$, $\lambda_{2,}$.... Functionen von $X_{1,}$, $X_{2,}$, $X_{3,}$...., welche sich nicht verändern, wenn man zu gleicher Zeit $X_{1,}$ mit $X_{2,}$, $X_{2,}$ mit $X_{3,}$, $X_{3,}$ mit $X_{4,}$ *etc.* vertauscht (§. 239.). Nun sieht man aus den Ausdrücken (767.), dass diese Vertauschungen erfolgen, wenn man blos $r^{a^{\nu}}$ statt r setzt. Die Grössen $\lambda_{0,}$, $\lambda_{1,}$, $\lambda_{2,}$ *etc.* verändern sich also, als Functionen von r betrachtet, nicht, wenn man $r^{a^{\nu}}$ statt r setzt. Mithin haben sie, vermöge

von $x^m = 1$.

dessen, was in (§. 269.) bewiesen, nothwendig die Form

770. $A + BX_1 + CX_2 + DX_3 \ldots$

Da nun die Werthe von X_1, X_2, $X_3 \ldots$ schon durch die obige Operation bekannt sind, so sind es die Werthe von $\lambda_{0,}$, $\lambda_{1,}$, $\lambda_{2,} \ldots$ auch. Also ist auch die Function τ_1 bekannt, und man erhält die Werthe der $\nu_,$ Wurzeln $X_{1,}$, $X_{2,}$, $X_{3,} \ldots$ durch ähnliche Formeln, wie (747. §. 267.), wenn man daselbst $\nu_,$ statt ν, X_1 statt X, τ_1 statt τ, statt α, β, $\gamma \ldots$ aber die Wurzeln der Gleichung $y^\nu - 1 = 0$, ausser Eins, setzt.

Auch ist zu bemerken, dass hier die Summe der Wurzeln

771. $X_{1,} + X_{2,} + X_{3,} \ldots = s = X_1$

ist.

273.

Der bekannte Werth von $X_{1,}$ giebt nur die Summe der $\varrho_,$ Wurzeln r, $r^{a^{\nu_,\nu}}$, $r^{a^{2\nu_,\nu}} \ldots r^{a^{(\varrho_,-1)\nu_,\nu}}$. Um den Werth von r zu finden, muss man noch die $\varrho_,$ Wurzeln, als durch eine Gleichung vom Grade $\varrho_,$ gegeben betrachten und von Neuem

772. $t_2 = r + \alpha r^{a^{\nu_,\nu}} + \alpha^2 r^{a^{2\nu_,\nu}} \ldots + \alpha^{\varrho_,-1} r^{a^{(\varrho_,-1)\nu_,\nu}}$

setzen, und α für eine Wurzel der Gleichung $y^{\varrho_,} - 1 = 0$ nehmen.

Hierauf setzt man

773. $\tau_2 = t_2^{\varrho_,} = \lambda_{0_2} + \alpha\lambda_{1_2} + \alpha^2\lambda_{2_2} \ldots + \alpha^{\varrho_,-1}\lambda_{2_{\varrho_,-1}}$

und verfährt wie in (§. 269. etc.). Ist die Zahl $\varrho_,$ zusammengesetzt, so, dass $\varrho_, = \nu_2\varrho_2$, so kann man,

Allgemeine Auflösung

um die Entwickelung einer zu hohen Potenz zu vermeiden, für α eine Wurzel der Gleichung $y^{\nu_2}-1=0$ nehmen, welches für t einen Ausdruck von der Form

$$774.\quad t_2=X_{1_2}+\alpha X_{2_2}+\alpha^2 X_{3_2}\ldots\ldots+\alpha^{\nu_2-1}X_{\nu_2}$$

giebt. Die Rechnung mit derselben wird wie oben fortgesetzt u. s. w., bis man zuletzt auf einen unzerlegbaren Factor kommt.

Der Nutzen dieser Zerlegungen besteht in der Erniedrigung der Potenzen, auf welche die Polynome t erhoben werden müssen, um τ zu haben, welches die Rechnung abkürzt; sodann aber in der Erniedrigung der Wurzel-Exponenten in dem Ausdruck von r, welches diesen Ausdruck vereinfacht.

Dieses ist der allgemeine und gleichförmige Gang der Rechnung. Wir wollen dieselbe auf einige Beispiele anwenden, um sie deutlicher zu machen.

Wir wollen zuerst die Gleichung $x^5-1=0$ aus (§. 266.) wieder vornehmen.

274.

Hier ist $\mu-1=4=2.2$; also kann man

$$775.\quad \nu=2,\ \varrho=2$$

setzen (§. 267.). Man nehme für α eine Wurzel der Gleichung $y^2-1=0$, so dass $\alpha^2=1$, so erhält man für t (747. §. 267.),

$$776.\quad t=X_1+\alpha X_2,$$

wo

$$777.\quad X_1=r+r^4,\ X_2=r^2+r^3\ (745.)$$

[*weil* $a = 2$ (734.)]. Daraus folgt, wenn man das Quadrat von t nimmt, weil $\alpha^2 = 1$ ist,

$$778.\quad \tau = t^2 = \lambda_0 + \alpha\lambda_1,$$

wo

$$779.\quad \lambda_0 = X_1^2 + X_2^2 \text{ und } \lambda_1 = 2X_1 X_2.$$

Setzt man hierin die Werthe von X_1 X_2 in r (777.) und entwickelt die Quadrate und Producte, indem man zugleich die Potenzen von r, vermöge $r^5 = 1$, unter r^5 erniedrigt, so erhält man

$$\lambda_0 = 4 + r + r^2 + r^3 + r^4$$
$$\lambda_1 = 2(r + r^2 + r^3 + r^4).$$

Da ferner die Summe der vier Wurzeln $r + r^2 + r^3 + r^4$, vermöge der gegebenen Gleichung $x^5 - 1 = 0$, gleich -1 ist, so ist

$$780.\quad \lambda_0 = 3 \text{ und } \lambda_2 = -2.$$

Der allgemeine Ausdruck von τ (778.), ist also

$$781.\quad \tau = 3 - 2\alpha.$$

Da nun die Werthe von α gleich $+1$ und -1 sind, weil α die Wurzel der Gleichung $y^2 - 1 = 0$ bezeichnen sollte, so erhält man, wenn man $\alpha = -1$ setzt,

$$782.\quad \tau_1 = 5$$

und da

$$783.\quad s = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1$$

ist, so geben die Ausdrücke (747. §. 267.)

$$784.\quad X_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2},\quad X_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Man hat also nunmehr durch den Werth von X_1 denjenigen von $r + r^2$, nämlich den Werth der

Allgemeine Auflösung

Summe zweier von den vier Wurzeln der gegebenen Gleichung $x^5 - 1 = 0$. Um die Wurzel r einzeln zu finden, mache man eine ähnliche Rechnung, indem man die beiden Wurzeln r und r^4 als Wurzeln einer Gleichung des zweiten Grades betrachtet.

Man setze also

$$t_1 = r + \alpha r^4,$$

wo α, wie oben, die Wurzel der Gleichung $y^2 - 1 = 0$ ist, so erhält man

$$786.\quad \tau_1 = t_1{}^2 = \lambda_{0,} + \alpha\lambda_{1,},$$

wo

$$787.\quad \lambda_{0,} = r^2 + r^8 \text{ und } \lambda_{1,} = 2r^5.$$

Man sieht leicht, dass diese Werthe von λ_0 und λ_1 durch die bekannten Werthe von X_1 und X_2 schon gegeben sind. In der That ist wegen $r^5 = 1$, und folglich $r^8 = r^3$, $\lambda_{0,}$ (786.) $= r^2 + r^3 = X_2$ (776.) und $\lambda_{1,} = 2$. Also ist $\tau_1 = X_2 + 2\alpha$, und hieraus, wenn man $\alpha = -1$ setzt, $\tau_1 = X_2 - 2$. Also erhält man aus (762. §. 270.), weil $\varrho = 2$ ist,

$$788.\quad r = \frac{X_1 + \sqrt{(X_2 - 2)}}{2}.$$

Setzt man hierin den oben gefundenen Werth von X_1 und X_2, so erhält man

$$789.\quad r = \frac{-1 + \sqrt{5} + \sqrt{(-10 - 2rs)}}{4}.$$

Zufolge (§. 271.) ist auch

$$790.\quad r^4 = \frac{X_1 - \sqrt{(X_2 - 2)}}{4},$$

also, wenn man X_1 mit X_2, X_2 mit X_1 verwechselt,

von $x^m = 1$.

791. $r^2 = \frac{X_2 + \sqrt{(X_2 - 2)}}{2}$, $r^3 = \frac{X_2 - \sqrt{(X_1 - 2)}}{2}$.

Dieses giebt, wenn man die Werthe von X_1 und X_2 substituirt,

$$792.\ \begin{cases} r^4 = \frac{-1 + \sqrt{5} - \sqrt{(-10 - 2\sqrt{5})}}{4} \\ r^2 = \frac{-1 - \sqrt{5} + \sqrt{(-10 + 2\sqrt{5})}}{4} \\ r^3 = \frac{-1 - \sqrt{5} - \sqrt{(-10 + 2\sqrt{5})}}{4}. \end{cases}$$

Da 5 eine Primzahl ist, so sind diese Werthe von r, r^2, r^3, r^4, nebst der Einheit, die fünf Wurzeln der Gleichung $x^5 - 1 = 0$ (§. 259.). [*Die fünf Wurzeln der Gleichung* $x^5 - 1 = 0$ *sind also*

$$793.\ \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5} + \sqrt{(-10 - 2\sqrt{5})}) \\ \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5} - \sqrt{(-10 - 2\sqrt{5})}) \\ \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5} + \sqrt{(-10 + 2\sqrt{5})}) \\ \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5} - \sqrt{(-10 + 2\sqrt{5})}).] \end{cases}$$

275.

Diese Ausdrücke der Wurzeln der Gleichung $x^5 = 1$, stimmen mit denjenigen überein, welche man durch die gewöhnliche Auflösung der Gleichung $x^5 - 1 = 0$ findet. Man erhält nämlich zuerst, wenn man $x^5 - 1 = 0$ durch $x - 1$ dividirt, $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$, welche Gleichung [*wenn man sie mit* x^2 *dividirt*] auf $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = 0$ gebracht werden kann, also, wenn man $x + \frac{1}{x} = u$

Allgemeine Auflösung

setzt, auf $u^2+u-1=0$. Man hat also [*aus* $x+\frac{1}{x}=u$] $x^2-xu+1=0$, welches $x=\frac{u\pm\sqrt{(u^2-4)}}{2}$ giebt. Sodann giebt $u^2+u-1=0$, $u=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, also erhält man, wenn man diesen Werth von u substituirt,

$$794.\quad x=\frac{-1\pm\sqrt{5}\pm\sqrt{(-10\pm2\sqrt{5})}}{4},$$

wo das obere Zeichen zu dem untern von $\sqrt{5}$ gehört, aber unabhängig von den Zeichen der andern Wurzel-Grössen ist, so dass man, vermöge der Zweifachheit der Zeichen der beiden Wurzel-Grössen, vier Wurzeln erhält [*welches dann die Ausdrücke* (793.) *giebt*].

276.

Wir gehen zu der Gleichung

$$795.\quad x^7-1=0$$

über, welche, wenn man die Wurzel 1 absondert,

$$796.\quad x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$$

giebt, deren Wurzeln r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6 sind.

Die kleinste primitive Wurzel der Zahl 7 ist, nach der Tafel (711. §. 260.), 3, also hat man die Reihe

$$3^0,\ 3^1,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4,\ 3^5, \text{ oder}$$

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,$$

deren Glieder durch 7 dividirt, die Reste

$$1,\ 3,\ 2,\ 6,\ 4,\ 5$$

geben, welches die Exponenten von r sind. Man

von $x^m = 1$.

erhält also für die Wurzeln der gegebenen Gleichung die Grössen

$$r, r^3, r^2, r^6, r^4, r^5,$$

die man statt

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$$

setzen muss.

277.

Hierbei ist zu bemerken, dass man, um die Exponenten der Grösse r zu haben, deren Potenzen die Wurzeln sind, die primitiven Wurzeln nicht der Reihe nach zu ihren Potenzen erheben und hernach erst diese Potenzen durch die Primzahl dividiren darf, auf welche sich die primitive Wurzel bezieht. Es ist hinreichend, wenn man jeden Rest durch die primitive Wurzel multiplicirt und nur den Rest der Division durch die gegebene Primzahl zurückbehält. Fängt man auf diese Weise mit 1 an, so sind in dem gegenwärtigen Falle die beiden ersten Glieder 1 und 3. Multiplicirt man nun 3 mit der primitiven Wurzel 3 und dividirt durch 7, so erhält man den Rest 2, für das dritte Glied. Ferner giebt 2 mit 3 multiplicirt das vierte Glied 6. Dieses mit 3 multiplicirt und mit 7 dividirt, giebt 4, endlich, 4 mit 3 multiplicirt und mit 7 dividirt, giebt den Rest 5. Führe man fort 5 mit 3 zu multipliciren und das Product mit 7 zu dividiren, so fände man wieder 1, und so, der Reihe nach, die schon vorgekommenen Glieder.

Allgemeine Auflösung

278.

Nun setze man

797. $t = r + \alpha r^3 + \alpha^2 r^2 + \alpha^3 r^6 + \alpha^4 r^4 + \alpha^5 r^5$

und nehme für α eine Wurzel der Gleichung $y^6 - 1 = 0$. Hierauf entwickele man die Function $\tau = t^6$. Da aber der Exponent $6 = 2 . 3$ ist, so lassen sich die Rechnung und die Resultate nach (§. 267.) vereinfachen, wenn man zunächst für α blos eine Wurzel der Gleichung $y^2 - 1 = 0$ nimmt, welches, wegen $\alpha^2 = 1$,

798. $t = X_1 + \alpha X_2$

giebt, wo

799. $X_1 = r + r^2 + r^4$ und $X_2 = r^3 + r^6 + r^5$

ist. Hierauf findet man

800. $\tau = t^2 = \lambda_0 + \alpha\lambda_1$, wo $\lambda_0 = X_1^2 + X_2^2$ und $\lambda_1 = 2 X_1 X_2$,

und wenn man entwickelt, weil $r^7 = 1$,

801. $\begin{cases} \lambda_0 = 3(r + r^3 + r^2 + r^6 + r^1 + r^5) \\ \lambda_1 = 2(3 + r + r^3 + r^2 + r^6 + r^4 + r^5). \end{cases}$

Da nun die Summe der Wurzeln $r + r^3 + r^2 + r^6 + r^4 + r^5$ gleich -1 ist, so ist

802. $\lambda_0 = -3$ und $\lambda_1 = 4$

und der Ausdruck von τ (800.) reducirt sich auf

803. $\tau = -3 + 4\alpha.$

Dieses giebt, wenn man $\alpha = -1$ setzt,

804. $\tau_1 = -r$

und auf der Stelle die beiden Wurzeln

von $x^m = 1$.

805. $$\begin{cases} X_1 = \dfrac{-1+\sqrt{-7}}{2} \\ X_2 = \dfrac{-1-\sqrt{-7}}{2}. \end{cases}$$

279.

Wir wollen nun die drei Glieder des Ausdrucks von X_1 (799.) als die Wurzeln einer Gleichung des dritten Grades betrachten. Nimmt man für α eine Wurzel der Gleichung $y^3 - 1 = 0$, so kann man setzen

806. $$t_1 = r + \alpha r^2 + \alpha^2 r^4.$$

Man setze ferner

807. $$\tau_1 = t_1^3 = \lambda_0 + \alpha\lambda_1 + \alpha^2\lambda_2,$$

so erhält man, wegen $\alpha^3 = 1$, und $r^7 = 1$,

808. $$\begin{cases} \lambda_0 = 6 + r^3 + r^6 + r^5 \\ \lambda_1 = 3\ (r + r^2 + r^4) \\ \lambda_2 = 3\ (r^3 + r^6 + r^5), \end{cases}$$

oder, zu Folge (799.)

809. $$\begin{cases} \lambda_0 = 6 + X_2 \\ \lambda_1 = 3X_1 \\ \lambda_2 = 3X_2, \end{cases}$$

so dass in (807.)

810. $$\tau_1 = 6 + X_2 + 3\alpha X_1 + 3\alpha^2 X_2.$$

Bezeichnet man nun die beiden imaginairen Wurzeln der Gleichung $y^3 - 1 = 0$, nämlich die beiden Wurzeln der Gleichung $y^2 + y + 1 = 0$, durch α und β, so dass

811. $$\alpha = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \text{ und } \beta = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

Allgemeine Auflösung

und schreibt in (810.)

$$812. \begin{cases} \tau_{1,} = 6 + X_2 + 3\alpha X_1 + 3\alpha^2 X_2 \\ \tau_{2,} = 6 + X_2 + 3\beta X_1 + 3\beta^2 X_2, \end{cases}$$

so erhält man, zu Folge (762. §. 270.), weil $\varrho = 3$ ist,

$$813. \quad r = \frac{X_1 + \tau_{1,}^{\frac{1}{3}} + \tau_{2,}^{\frac{1}{3}}}{3}$$

[*welches der Ausdruck der siebenten Wurzel von* 1 *ist. Man muss, um dieselbe vollständig in Zahlen zu haben, hieraus und in* (812.) *die Werthe von* X_1 *und* X_2 *aus* (805.), *desgleichen aus* (811.) *die Werthe von* α *und* β *in* (812.), *hierauf aber die Werthe von* $\tau_{1,}$ *und* $\tau_{2,}$ *aus* (812.) *in* (813.) *setzen*].

280.

Wir kommen zu der Gleichung

$$814. \quad x^{11} - 1 = 0,$$

welche, nachdem sie mit $x - 1$ dividirt worden, die Gleichung des zehnten Grades

$$815. \quad x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

giebt.

Aus der Tafel (711. §. 260.) sieht man, dass die kleinste, zur Zahl 11 gehörige primitive Wurzel 2 ist; also ist die Reihe der Reste, welche sich leicht durch das Verfahren von (§. 277.) finden lassen,

1, 2, 4, 8, 5, 10, 9, 7, 3, 6,

so dass die Reihe der Wurzeln

$$r, r^2, r^4, r^8, r^5, r^{10}, r^9, r^7, r^3, r^6$$

von $x^m = 1$.

ist, deren Summe -1 ist. Man erhält also für t den allgemeinen Ausdruck

816. $t = r + \alpha r^2 + \alpha^2 r^4 + \alpha^3 r^8 + \alpha^4 r^5 + \alpha^5 r^{10} + \alpha^6 r^9 + \alpha^7 r^7 + \alpha^8 r^3 + \alpha^9 r^6$,

welcher, wenn man für α eine Wurzel der Gleichung $y^{10} - 1 = 0$ setzt, wegen $\alpha^{10} = 1$,

817. $\tau = t^{10} = \lambda_0 + \alpha\lambda_1 + \alpha^2\lambda_2 + \alpha^3\lambda_3 + \ldots + \alpha^9\lambda_9$

giebt, woraus man den Werth von r, vermittelst des allgemeinen Ausdrucks (729. §. 264.) findet, wenn man in denselben $\mu = 11$ setzt.

Um aber die Erhebung des Polynoms t (816.) zur zehnten Potenz zu ersparen, kann man die Operation in zwei andere, den beiden Factoren 2 und 5 der Zahl $11 - 1 = 10$ entsprechende Rechnungen, nach dem Verfahren von (§. 267.), zerlegen.

Man setze zuerst für α eine Wurzel der Gleichung $y^2 - 1 = 0$, so dass $\alpha^2 = 1$. Hierdurch reducirt sich der Ausdruck von t (816.) auf die einfachere Form

815. $t = X_1 + \alpha X_2$,

wenn, der Kürze wegen,

819. $\begin{cases} X_1 = r + r^4 + r^5 + r^9 + r^3 \text{ und} \\ X_2 = r^2 + r^8 + r^{10} + r^7 + r^6 \end{cases}$

ist. Der Werth von τ ist jetzt

820. $\tau = t^2 = X_1^2 + X_2^2 + 2\alpha X_1 X_2$.

Entwickelt man die Quadrate von X_1 und X_2 (819.) und reducirt die Potenzen von r, vermittelst $r^{11} = 1$, unter r^{11}, so erhält man

Allgemeine Auflösung

821. $X_1^2 = 2X_1 + 3X_2$, und $X_2^2 = 2X_2 + 3X_1$, und folglich, weil $X_1 + X_2$ die Summe aller Wurzeln ist [*also* $= -1$ *ist*],

$$822.\quad X_1^2 + X_2^2 = 5(X_1 + X_2) = -5.$$

Eben so findet man, wenn man X_1 und X_2 in einander multiplicirt,

$$823.\quad X_1 X_2 = 5 + 2(X_1 + X_2) = 5 - 2 = 3.$$

Dieses giebt, zu Folge (820.),

$$824.\quad \tau = -5 + 6\alpha,$$

und, wenn man $\alpha = -1$ setzt,

$$825.\quad \tau_1 = -11.$$

Also erhält man, vermöge der Ausdrücke (747.), wenn man in dieselben $r = 2$ setzt,

$$826.\quad X_1 = \frac{-1 + \sqrt{-11}}{2} \text{ und } X_2 = \frac{-1 - \sqrt{-11}}{2}.$$

281.

Nachdem auf diese Weise die Werthe von X_1 und X_2 gefunden sind, muss man, um r zu haben, die fünf Glieder, aus welchen die Grösse X_1 zusammengesetzt ist (819.), als die Wurzeln einer Gleichung des fünften Grades betrachten; und weil 5 eine Primzahl ist, kann man sich des allgemeinen Ausdrucks von t,

$$827.\quad t = r + \alpha r^4 + \alpha^2 r^5 + \alpha^3 r^9 + \alpha^4 r^3,$$

bedienen und für α eine Wurzel der Gleichung $y^5 - 1 = 0$ nehmen. Hernach muss man

$$828.\quad \tau = t^5 = \lambda_0 + \alpha\lambda_1 + \alpha^2\lambda_2 + \alpha^3\lambda_3 + \alpha^4\lambda_4$$

setzen. Alsdann kommt es nur darauf an, durch die Erhebung des Ausdrucks von t (827.) in die fünfte Potenz, die Werthe der Coefficienten λ_0, λ_1 *etc.* in r zu finden, wobei man die Potenzen von α unter α^5, und diejenigen von r unter r^{11}, reduciren muss, weil $\alpha^5 = 1$ und $r^{11} = 1$. Durch die hiezu nöthige Rechnung, welche weiter keine Schwierigkeit hat, als dass sie ein wenig weitläufig ist, finde ich folgendes Resultat, auf dessen Richtigkeit man sich verlassen kann,

$$829.\quad \begin{cases} \lambda_0 = 120 + 31 X_1 + 70 X_2 \\ \lambda_1 = 100 + 60 X_1 + 45 X_2 \\ \lambda_2 = 50 + 85 X_1 + 30 X_2 \\ \lambda_3 = \phantom{100 + {}} 60 X_1 + 65 X_2 \\ \lambda_4 = \phantom{100 + {}} 50 X_1 + 75 X_2, \end{cases}$$

wo X_1 und X_2 die obigen Werthe in r (819.) haben. Da die Werthe von X_1 und X_2 schon durch die vorige Rechnung bekannt sind (826.), so ist nunmehr in dem Ausdruck von τ (828.) nichts mehr unbestimmt, sondern man findet vermittelst des Ausdrucks (762. §. 270.), wenn man in denselben $\varrho = 5$ und statt α, β, γ, δ die vier Wurzeln der Gleichung $y^5 - 1 = 0$ ausser 1, statt τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 aber die Werthe von τ setzt, welche den Substitutionen von α, β, γ, δ statt α in dem gefundenen Ausdruck von τ entsprechen, auf der Stelle den Werth der ersten Wurzel r der Gleichung $x^{11} - 1 = 0$.

Allgemeine Auflösung

282.

Setzt man in die Ausdrücke von λ_0, λ_1 *etc.* (829.) die Werthe von X_1 und X_2 (826.), so erhält man

830. $$\begin{cases} \lambda_0 = \frac{1}{2}(\ \ 139 - 39\sqrt{-11}) \\ \lambda_1 = \frac{1}{2}(\ \ \ 95 + 15\sqrt{-11}) \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(-\ 15 + 55\sqrt{-11}) \\ \lambda_3 = \frac{1}{2}(-125 - \ 5\sqrt{-11}) \\ \lambda_4 = \frac{1}{2}(-125 + 25\sqrt{-11}). \end{cases}$$

Setzt man hierauf statt der Wurzeln β, γ, δ die Potenzen α^2, α^3, α^4 der Wurzel α, welche sie ausdrücken, so erhält man, weil 5 eine Primzahl ist, wenn man die Potenzen von α unter die fünfte reducirt,

831. $$\begin{cases} \tau_1 = \lambda_0 + \alpha\ \lambda_1 + \alpha^2\lambda_2 + \alpha^3\lambda_3 + \alpha^4\lambda_4 \\ \tau_2 = \lambda_0 + \alpha^2\lambda_1 + \alpha^4\lambda_2 + \alpha\ \lambda_3 + \alpha^3\lambda_4 \\ \tau_3 = \lambda_0 + \alpha^3\lambda_1 + \alpha\ \lambda_2 + \alpha^4\lambda_3 + \alpha^2\lambda_4 \\ \tau_4 = \lambda_0 + \alpha^4\lambda_1 + \alpha^3\lambda_2 + \alpha^2\lambda_3 + \alpha\ \lambda_4, \end{cases}$$

und der Ausdruck von r ist, zu Folge (762.),

832. $$r = \frac{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-11}) + \tau_1^{\frac{1}{5}} + \tau_2^{\frac{1}{5}} + \tau_3^{\frac{1}{5}} + \tau_4^{\frac{1}{5}}}{5},$$

worin man nur noch für α, α^2, α^3, α^4 die Werthe von r, r^2, r^3, r^4 (789. und 792.) setzen darf.

283.

Auf dieselbe Weise würde man die Werthe der Potenzen von r finden, welche, ausser der Einheit, die obigen Wurzeln der Gleichung $x^{11} - 1 = 0$ sind.

von $x^m = 1$.

Zunächst findet man die Werthe der Wurzeln r^4, r^5, r^9, r^3, welche in X_1 vorkommen, wenn man in den Ausdruck von r (832.) die Wurzel-Grössen $\tau_2^{\frac{1}{5}}$, $\tau_3^{\frac{1}{5}}$, $\tau_4^{\frac{1}{5}}$, der Reihe nach,

für die Wurzel r^4 mit α^4, β^4, γ^4, δ^4,
d. h. mit α^4, α^3, α^2, α

für die Wurzel r^5 mit α^3, β^3, γ^3, δ^3,
d. h. mit α^3, α, α^4, α^2

für die Wurzel r^9 mit α^2, β^2, γ^2, δ^2,
d. h. mit α^2, α^4, α, α^3

für die Wurzel r^3 mit α, β, γ, δ,
d. h. mit α, α^2, α^3, α^4

multiplicirt.

Um sodann weiter die Werthe der andern Wurzeln r^2, r^8, r^{10}, r^7 und r^6 zu finden, aus welchen X_2 zusammengesetzt ist (819.), darf man nur in die Ausdrücke der Wurzeln r, r^4, r^5, r^9, r^3, X_2 statt X_1 und X_1 statt X_2 setzen, welches geschieht, indem man in den Ausdrücken von λ_0, λ_1 *etc.* das Zeichen der Wurzelgrösse $\sqrt{-11}$ verändert (826.).

284.

Ich theile hier um so mehr diese Ausdrücke der Wurzeln der Gleichung $x^{11} - 1 = 0$ mit, da sie bisher noch nie gefunden waren und auch durch die bekannten Methoden nicht gefunden werden konnten, weil diese die Auflösung einer Gleichung des fünften Grades erfordern.

Jedoch leidet das so eben Gesagte einige Ein-

Allgemeine Auflösung

schränkung. Man findet am Schlusse der in dem vorigen Zusatze erwähnten Abhandlung von Vandermonde über die Auflösung der Gleichungen den Ausdruck der Wurzel einer Gleichung des fünften Grades, von welcher die Auflösung der Gleichung $x^{11} - 1 = 0$ abhängt. Dividirt man nämlich die Gleichung $x^{11} - 1 = 0$ durch $x - 1$, so erhält man

$$833. \quad x^{10} + x^9 + x^8 \ldots + 1 = 0,$$

welche Gleichung zu den reciproken gehört und auf die fünfte Ordnung reducirt werden kann, wenn man

$$x + \frac{1}{x} = u$$

setzt, welches, vermöge der Ausdrücke (§. 181.), folgende Gleichung in u giebt

$$834. \quad u^5 + u^4 - 4u^3 - 3u^2 + 3u + 1 = 0.$$

Nimmt man u negativ, wodurch sich die Zeichen aller Glieder mit geraden Exponenten verändern, so hat man genau die nämliche Gleichung des fünften Grades, welche Vandermonde auflöset. Der Verfasser giebt den Ausdruck der Wurzel dieser Gleichung nicht als ein Resultat seines allgemeinen Verfahrens, und theilt das Detail der Operation, durch welche er den Ausdruck fand, nicht mit. Niemand nach ihm hat sich, so viel mir bekannt, mit dem Beweise seines Resultats beschäftigt, welches selbst in Vergessenheit gerathen zu seyn scheint.

285.

Der obige Ausdruck der Wurzel r der Gleichung $x^{11} - 1 = 0$ kann zu diesem Beweise füh-

von $x^m = 1$.

ren. Man kann aber auch direct ein dem Vandermondeschen zu vergleichendes Resultat finden, wenn man in den allgemeinen Ausdruck von t (816. §. 280). für α eine Wurzel der Gleichung $y^5 - 1 = 0$, statt wie oben geschehen, eine Wurzel der Gleichung $y^2 - 1 = 0$ setzt, welches angeht, weil 2 und 5 Factoren von 10 sind, und man eben so wohl von dem einen als von dem andern ausgehen kann.

286.

Man setze also

835. $\alpha^5 = 1$,

so ist der allgemeine Ausdruck von t (816.) folgender:

836. $t = X_1 + \alpha X_2 + \alpha^2 X_3 + \alpha^3 X_4 + \alpha^4 X_5$,

wo

$$837.\ \begin{cases} X_1 = r + r^{10} \\ X_2 = r^2 + r^9 \\ X_3 = r^3 + r^8 \\ X_4 = r^4 + r^7 \\ X_5 = r^5 + r^6 \end{cases}$$

ist, und wo man nun die Grössen X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 als die Wurzeln einer Gleichung des fünften Grades ansehen kann. Dieses ist der Fall, welchen wir allgemein in (§. 268.) untersuchten.

Man setze also

838. $\tau = t^5 = \lambda_0 + \alpha\lambda_1 + \alpha^2\lambda_2 + \alpha^3\lambda_3 + \alpha^4\lambda_4$

und suche, durch Entwickelung der fünften Potenz von t (836.), indem man dabei zugleich überall die

Potenzen von α, vermöge $\alpha^5 = 1$, bis unter die fünfte, und die Potenzen von r, vermöge $r^{11} = 1$, bis unter die eilfte reducirt, die Werthe von λ_0, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 in Functionen von r. Die Rechnung hat keine andere Schwierigkeit als dass sie weitläufig ist. Folgendes sind die Resultate, welche ich gefunden habe und für welche ich stehen zu können glaube.

Setzt man nämlich, der Kürze wegen,

839. $s = r + r^2 + r^4 + r^8 + r^5 + r^{10} + r^9 + r^7 + r^3 + r^6$,

so erhält man

840. $$\begin{cases} \lambda_0 = 1640 + 1836 \cdot s \\ \lambda_1 = 1700 + 1830 \cdot s \\ \lambda_2 = 2050 + 1795 \cdot s \\ \lambda_3 = 1800 + 1820 \cdot s \\ \lambda_4 = 1900 + 1810 \cdot s \end{cases}$$

Nun ist s die Summe der Wurzeln, welche, nach der Natur der aufzulösenden Gleichung des zehnten Grades in x (833.), deren zweites Glied x^9 ist, gleich -1 seyn muss.

Setzt man also $s = -1$, so erhält man

841. $$\begin{cases} \lambda_0 = -196 \\ \lambda_1 = -130 \\ \lambda_2 = +255 \\ \lambda_3 = -20 \\ \lambda_4 = +90. \end{cases}$$

Dieses giebt, zu Folge (838.),

842. $\tau = -196 - 130\alpha + 255\alpha^2 - 20\alpha^3 + 90\alpha^4$.

Setzt man statt α, der Reihe nach, die vier Wurzeln α, β, γ, δ, welche die Gleichung $x^5 - 1 = 0$

ausser 1 hat, und nimmt, wie in (§. 282.), für diese Wurzeln die Potenzen α, α^2, α^3, α^4, deren Werthe die nämlichen sind, wie r, r^2, r^3, r^4 (§. 274.), so erhält man, weil $\alpha^5 = 1$ ist,

843. $$\begin{cases} \tau_1 = -196 - 130\alpha + 255\alpha^2 - 20\alpha^3 + 90\alpha^4 \\ \tau_2 = -196 - 130\alpha^2 + 255\alpha^4 - 20\alpha + 90\alpha^3 \\ \tau_3 = -196 - 130\alpha^3 + 255\alpha - 20\alpha^4 + 90\alpha^2 \\ \tau_4 = -196 - 130\alpha^4 + 255\alpha^3 - 20\alpha^2 + 90\alpha, \end{cases}$$

und der allgemeine Ausdruck (744.) giebt auf der Stelle

844. $$X_1 = \frac{-1 + \tau_1^{\frac{1}{5}} + \tau_2^{\frac{1}{5}} + \tau_3^{\frac{1}{5}} + \tau_4^{\frac{1}{5}}}{5}.$$

Diese Grösse X_1 ist gleich $r + r^{10}$ (837.) $= r + \frac{1}{r}$ weil $r^{11} = 1$ ist. Sie ist der Werth von $2 \cos \frac{2\pi}{11}$ (§. 268.); auch ist sie der Werth der Wurzel u der Gleichung vom fünften Grade (834.), weil r die Wurzel der Gleichung vom eilften Grade $x^{11} - 1 = 0$ ist. [*Weil in (§. 284.)* $x + \frac{1}{x} = u$ *war, welches mit dem gegenwärtigen* $r + \frac{1}{r} = X_1$ *übereinstimmt, so dass* $u = X_1$.] Der obige Ausdruck (844.), negativ genommen, muss also mit dem Vandermondeschen übereinstimmen.

287.

Um die beiden Ausdrücke leicht vergleichen zu können, wollen wir in die obigen Ausdrücke von

Allgemeine Auflösung

τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 (843.) die Werthe von α, α^2, α^3, α^4 substituiren, welche die nämlichen sind, wie die von r, r^2, r^3, r^4 (789. und 792.).

Setzt man, der Kürze wegen,

845. $\sqrt{(-10-2\sqrt{5})} = m$ und $\sqrt{(-10+2\sqrt{5})} = n$,

so ist [*zu Folge* (789. *und* 792.)]

$$846. \begin{cases} \alpha = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}+m) \\ \alpha^2 = \frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}+n) \\ \alpha^3 = \frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}-n) \\ \alpha^4 = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}-m) \end{cases}$$

Um sich von der Richtigkeit dieser Ausdrücke zu überzeugen, darf man nur das Quadrat von $-1+\sqrt{5}+m$ nehmen, welches $6-2\sqrt{5}+m^2+m(\sqrt{5}-1)m$ ist. Bringt man nun unter das Wurzel-Zeichen von m, den Coefficienten $\sqrt{5}-1$, zum Quadrat erhoben, so findet man $(\sqrt{5}-1)m = 2n$, so dass man, wenn man den Werth von m^2 substituirt, $(-1+\sqrt{5}+m)^2 = 4(-1-\sqrt{5}+n)$ erhält [*wie es zu Folge* (846.) *seyn soll*]. Man muss auf dieselbe Weise die andern Potenzen von α prüfen.

Substituirt man nun die Werthe von α, α^2, α^3, α^4 in τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 (843.), so erhält man

$$847. \begin{cases} \tau_1 = \frac{1}{4}(-979-275\sqrt{5}-220m+275n) \\ \tau_2 = \frac{1}{4}(-979+275\sqrt{5}-275m-220n) \\ \tau_3 = \frac{1}{4}(-979+275\sqrt{5}+275m+220n) \\ \tau_4 = \frac{1}{4}(-979+275\sqrt{5}+220m-275n), \end{cases}$$

wo zu bemerken, dass die Coefficienten 979, 275 und 220 sämmtlich durch 11 theilbar sind. Die Quotien-

von $x^m = 1$.

ten sind 89, 25 und 20, so dass die Grössen τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 auch einfacher, wie folgt, ausgedrückt werden können.

$$848.\quad \begin{cases} \tau_1 = \frac{11}{4}(-89 - 25\sqrt{5} - 20m + 25n) \\ \tau_2 = \frac{11}{4}(-89 + 25\sqrt{5} - 25m - 20n) \\ \tau_3 = \frac{11}{4}(-89 + 25\sqrt{5} + 25m + 20n) \\ \tau_4 = \frac{11}{4}(-89 - 25\sqrt{5} + 20m - 25n). \end{cases}$$

288.

Um unsern Ausdruck dem Vandermondeschen noch näher zu bringen, wollen wir damit folgende Verwandlung vornehmen.

Wir wollen

849. $m = p + q$ und $m = p - q$, und

850. $p = \sqrt{(-5 - 2\sqrt{5})}$, $q = \sqrt{(-5 + 2\sqrt{5})}$

setzen, welches sich rechtfertiget, wenn man die Grössen quadrirt und bemerkt, dass $pq = -\sqrt{5}$ ist, indem das Product der beiden reellen und positiven Wurzelgrössen $\sqrt{(5 + 2\sqrt{5})}$ und $\sqrt{(5 - 2\sqrt{5})}$ gleich $\sqrt{5}$, also $\sqrt{5} = p\sqrt{-1} \cdot q\sqrt{-1} = pq$ ist.

Substituirt man dieses in die obigen Ausdrücke (848.), so erhält man

$$851.\quad \begin{cases} \tau_1 = \frac{11}{4}(-89 - 25\sqrt{5} + 5p - 45q) \\ \tau_2 = \frac{11}{4}(-89 + 25\sqrt{5} - 45p - 5q) \\ \tau_3 = \frac{11}{4}(-89 + 25\sqrt{5} - 45p + 5q) \\ \tau_4 = \frac{11}{4}(-89 - 25\sqrt{5} - 5p + 45q). \end{cases}$$

Allgemeine Auflösung

289.

Nun findet Vandermonde, in den Memoiren der Academie der Wissenschaften vom Jahre 1771. S. 416., für die Wurzel der Gleichung

852. $x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0$

den Ausdruck

853. $x = \frac{1}{5}(1 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4)$,

wo

854. $$\begin{cases} \Delta_1 = \sqrt[5]{\tfrac{11}{4}(89 + 25\sqrt{5} - 5q + 45p)} \\ \Delta_2 = \sqrt[5]{\tfrac{11}{4}(89 + 25\sqrt{5} + 5q - 45p)} \\ \Delta_3 = \sqrt[5]{\tfrac{11}{4}(89 - 25\sqrt{5} - 5q - 45p)} \\ \Delta_4 = \sqrt[5]{\tfrac{11}{4}(89 - 25\sqrt{5} + 5q + 45p)}. \end{cases}$$

Wie man sieht, stimmen die Ausdrücke von Δ_3 und Δ_4 mit denen von $\sqrt[5]{(-\tau_3)}$ und $\sqrt[5]{(-\tau_2)}$ überein, und die Ausdrücke von Δ_1 und Δ_2 sind von $\sqrt[5]{(-\tau_1)}$ und $\sqrt[5]{(-\tau_4)}$ nur darin verschieden, dass die Grössen p und q vertauscht sind, welches nur von den Zeichen der Wurzelgrösse $2\sqrt{5}$ in der Quadrat-Wurzel herkommt. Bis auf diese Abweichung, welche in der Vandermondeschen Abhandlung auch von einem Druckfehler herrühren kann, stimmen seine Resultate mit den unsrigen vollkommen, weil die Wurzel seiner Gleichung in x der Wurzel unserer Gleichung in u, negativ genommen, entspricht, und jede Wurzelgrösse des fünften Grades $\sqrt[5]{(-\tau)}$ das Nämliche ist, wie $-\sqrt[5]{\tau}$. Man kann daher sagen,

von $x^m = 1$.

dass Vandermonde zuerst die damaligen Grenzen der Auflösungs-Kunst der Gleichung mit zwei Gliedern überschritt.

290.

Um keinen Zweifel wegen der Correction, die der Vandermondesche Ausdruck nöthig hat, zu lassen, wollen wir zeigen, dass sie aus seiner Theorie selbst folgt.

Bezeichnet man nämlich die vier Wurzeln der Gleichung $x^5 - 1 = 0$, ausser der Einheit, durch r_1, r_2, r_3, r_4, so ist aus der allgemeinen Formel des Artikel VIII. der Vandermondeschen Abhandlungen leicht zu sehen, dass die Grösse Δ nur von der Form

855. $$\sqrt[5]{(A + Br_1 + Cr_2 + Dr_3 + Er_4)}$$

seyn kann. Setzt man nun diesen Ausdruck für eine der Grössen Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, so muss man die andern drei erhalten, wenn man in den Ausdruck r^2, r^3, r^4 statt r schreibt. Die Grössen A, B, C, D, E sind Functionen der Wurzeln der aufzulösenden Gleichung, die von den Wurzeln r_1, r_2, r_3, r_4 nicht abhangen.

Nun ist aus dem in dem nämlichen Artikel [*bei Vandermonde*] gegebenen Verhältnisse zwischen diesen letzteren Wurzeln,

856. $$\begin{cases} r_1^2 = r_3,\ r_2^2 = r_4,\ r_3^2 = r_2,\ r_4^2 = r_1 \\ r_1^3 = r_1 r_3 = r_4,\ r_2^3 = r_2 r_4 = r_3,\ r_3^3 = r_2 r_3 = r_1, \\ \qquad r_4^3 = r_1 r_4 = r_2 \\ r_1^4 = r_1 r_4 = r_2,\ r_2^4 = r_2 r_3 = r_1,\ r_3^4 = r_1 r_3 = r_4, \\ \qquad r_4^4 = r_2 r_4 = r_3. \end{cases}$$

Allgemeine Auflösung

Die vorhin erwähnten vier Ausdrücke sind also

857. $$\begin{cases} \sqrt[5]{(A + Br_1 + Cr_2 + Dr_3 + Er_4)} \\ \sqrt[5]{(A + Br_3 + Cr_4 + Dr_2 + Er_1)} \\ \sqrt[5]{(A + Br_4 + Cr_3 + Dr_1 + Er_2)} \\ \sqrt[5]{(A + Br_2 + Cr_1 + Dr_4 + Er_3)}. \end{cases}$$

291.

Im XXIIIten Artikel der nämlichen Abhandlung findet man für die Wurzeln der Gleichung $x^5 - 1 = 0$ folgende Ausdrücke, in welche ich, der Kürze wegen, die obigen Buchstaben p und q (850.) setzen will:

858. $$\begin{cases} \tfrac{1}{4}(-1 + \sqrt{5} + q + p) \\ \tfrac{1}{4}(-1 + \sqrt{5} - q - p) \\ \tfrac{1}{4}(-1 - \sqrt{5} + q - p) \\ \tfrac{1}{4}(-1 - \sqrt{5} - q + p). \end{cases}$$

Setzt man die erste dieser Wurzeln für r_1, so muss man, nach den Ausdrücken (846.), wenn man α für r_1 und $p + q$ und $p - q$ für m und n nimmt, überhaupt

859. $$\begin{cases} r_1 = \tfrac{1}{4}(-1 + \sqrt{5} + p + q) \\ r_2 = r_1^2 = \tfrac{1}{4}(-1 - \sqrt{5} + p - q) \\ r_4 = r_1^3 = \tfrac{1}{4}(-1 - \sqrt{5} - p + q) \\ r_3 = r_1^4 = \tfrac{1}{4}(-1 + \sqrt{5} - p - q) \end{cases}$$

setzen. Substituirt man diese Werthe in die obigen Ausdrücke (857.), so gehen sie in

860.

von $x^m = 1$.

$$860. \begin{cases} \sqrt[5]{\tfrac{1}{4}(F+G\sqrt{5}+Hp+Kq)} \\ \sqrt[5]{\tfrac{1}{4}(F-G\sqrt{5}+Kp-Hq)} \\ \sqrt[5]{\tfrac{1}{4}(F-G\sqrt{5}-Kp+Hq)} \\ \sqrt[5]{\tfrac{1}{4}(F+G\sqrt{5}+Hp-Kq)} \end{cases}$$

über, wo

$$861. \begin{cases} F = 4A-B-C-D-E \\ G = \quad +B+C-D-E \\ H = \quad +B-C+D-E \\ K = \quad +B-C-D+E \end{cases}$$

ist, welche Ausdrücke nun mit denen von Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 (854.) übereinstimmen sollen. Aber man sieht beim ersten Blick, dass die Uebereinstimmung nicht anders Statt finden kann, als wenn man zugleich in Δ_1 und Δ_2, oder in Δ_3 und Δ_4, p statt q und q statt p setzt, weil in den Ausdrücken (860.) die Coefficienten von p und q nicht die nämlichen sind, wie in den beiden, in welchen die Wurzel $\sqrt{5}$ das nämliche Zeichen hat, statt dass in den Ausdrükken von Δ_1, Δ_2, Δ_3 und Δ_4 (854.) die Grössen p und q überall die nämlichen Coefficienten haben.

292.

Vertauscht man in Δ_1 und Δ_2 p und q, nach (§. 289.), um die Vandermondeschen Ausdrücke auf die unsrigen zu bringen, so kann man setzen

Allgemeine Auflösung

862. $$\begin{cases} \Delta_1 = \sqrt[5]{\tfrac{1}{4}(F + G\sqrt{5} + Hp + Kq)} \\ \Delta_2 = \sqrt[5]{\tfrac{1}{4}(F + G\sqrt{5} - Hp - Kq)} \\ \Delta_3 = \sqrt[5]{\tfrac{1}{4}(F - G\sqrt{5} - Kp + Hq)} \\ \Delta_4 = \sqrt[5]{\tfrac{1}{4}(F - G\sqrt{5} + Kp - Hq)}, \end{cases}$$

welches übereintrifft, wenn man

863. $F = 11.89$, $G = 11.25$, $H = -5$ und $K = 45$

setzt. Daraus folgt, vermöge der Ausdrücke (861.)

864. $B = A - 11.6$, $C = A - 11.26$, $D = A - 11.41$,
$E = A - 11.16$.

Die Grösse A bleibt unbestimmt, weil sie wegen $1 + r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0$ aus den Ausdrücken von Δ (857.) verschwindet.

Setzt man $A = 196$, so findet man

865. $B = 130$, $C = -90$, $D = -255$, $E = 20$,

und der Ausdruck $\sqrt[5]{(A + Br_1 + Cr_2 + Dr_3 + Er_4)}$ (855.) kommt mit demjenigen von $\sqrt[5]{(-\tau)}$ (842.) überein, weil, wenn man $r_1 = \alpha$ setzt, $r_2 = \alpha^4$, $r_3 = \alpha^2$, $r_4 = \alpha^3$ ist (§. 291.). Die von diesen Ausdrücken abgeleiteten Ausdrücke werden mit denjenigen von $\sqrt[5]{(-\tau_2)}$, $\sqrt[5]{(-\tau_3)}$ und $\sqrt[5]{(-\tau_4)}$ übereinstimmen.

293.

Wir wollen zum letzten Beispiele die Gleichung

866. $$x^{13} - 1 = 0$$

nehmen.

Da $13 - 1 = 12 = 2.2.3$, so kann die Operation auf folgende Weise in drei andere zerlegt werden.

von $x^m = 1$.

Man muss zuerst für die Zahl 13 eine primitive Wurzel haben. Die Tafel (711.) giebt die Zahl 2, deren Potenzen, der Reihe nach, bis zur eilften, durch 13 dividirt, die Reste

2, 4, 8, 3, 6, 12, 11, 9, 5, 10, 7

geben.

Bezeichnet man also durch r eine Wurzel der Gleichung

867. $x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 \dots + 1 = 0,$

so sind die 11 andern Wurzeln,

868. $r^2, r^4, r^8, r^3, r^6, r^{12}, r^{11}, r^9, r^5, r^{10}, r^7.$

Man kann daher allgemein

869. $$t = r + \alpha r^2 + \alpha^2 r^4 + \alpha^3 r^8 + \alpha^4 r^6 + \alpha^5 r^{12} + \alpha^6 r^{11} + \alpha^7 r^9 + \alpha^8 r^5 + \alpha^9 r^{10} + \alpha^{10} r^7$$

setzen. Nimmt man nun für α eine Wurzel der Gleichung

$$y^2 - 1 = 0,$$

so dass

870. $$\alpha^2 = 1,$$

so reducirt sich die Function t (869.) auf die Form

871. $$t = X_1 + \alpha X_2,$$

wo

872. $$\begin{cases} X_1 = r + r^4 + r^3 + r^{12} + r^9 + r^{10} \\ X_2 = r^2 + r^8 + r^6 + r^{11} + r^5 + r^7. \end{cases}$$

Daraus folgt

873. $$\begin{cases} \tau = t^2 = \lambda_0 + \alpha\lambda_1 \\ \lambda_0 = X_1^2 + X_2^2 \\ \lambda_1 = 2 X_1 X_2. \end{cases}$$

Die Berechnung des Werthes von λ_0 kann man er-

sparen, wenn man sich des Ausdrucks (747. §. 267.) bedient, welcher hier, weil

$$874.\quad \nu = 2$$

und die Summe der Wurzeln der gegeben Gleichung

$$875.\quad s = -1$$

ist,

$$876.\quad \tau = 1 + (\alpha - 1)\lambda$$

ist, so dass man, wenn man $\alpha = -1$ setzt, den Werth von τ_1 erhält. Die beiden Wurzeln X_1 und X_2 sind dann, nach (747.)

$$877.\quad X_1 = \frac{-1 + \sqrt{(1-2\lambda_1)}}{2} \text{ und } X_2 = \frac{-1 - \sqrt{(1-2\lambda_1)}}{2}.$$

Um λ_1 zu finden, muss man das Product $X_1 X_2$ (873.) nach Potenzen von r entwickeln und dabei, wegen $r^{13} = 1$, die Potenzen, welche über die zwölfte steigen, reduciren. Man findet

$$878.\quad X_1 X_2 = 3s,$$

wo s die Summe der Wurzeln r, r^2, r^4 ist, welche gleich -1 ist, so dass

$$879.\quad \lambda_1 = -6 \quad (873.).$$

Dieses giebt, für die Werthe von X_1 und X_2 (877.)

$$880.\quad X_1 = \frac{-1 + \sqrt{-11}}{2}, \quad X_2 = \frac{-1 - \sqrt{-11}}{2}.$$

294.

Nun betrachte man die sechs Wurzeln, aus welchen die Grösse X_1 zusammengesetzt ist (872.), als die Wurzeln einer Gleichung des sechsten Grades, so kann man von neuem

$$881.\quad t_1 = r + \alpha r^4 + \alpha^2 r^3 + \alpha^3 r^{12} + \alpha^4 r^9 + \alpha^5 r^{10}$$

von $x^m = 1$.

setzen. Statt aber allgemein für α eine Wurzel der Gleichung

$$y^6 - 1 = 0$$

zu nehmen, wozu die Entwickelung der sechsten Potenz des Polynoms t_1 (881.) nöthig seyn würde, wollen wir von neuem eine Wurzel der Gleichung

$$y^2 - 1 = 0$$

nehmen, so dass die Function t_1 (881.), vermittelst

$$882. \quad \alpha^2 = 1,$$

die Form

$$883. \quad t_1 = X_{1,} + \alpha X_{2,}$$

bekommt, wo

$$884. \quad X_1 = r + r^3 + r^9, \quad X_2 = r^4 + r^{12} + r^{10}$$

ist. Ferner ist, wie oben (873.),

$$885. \begin{cases} \tau_1 = t_1{}^2 = \lambda_{0,} + \alpha \lambda_{1,} \\ \lambda_{0,} = X_{1,}{}^2 + X_{2,}{}^2 \\ \lambda_{1,} = X_{1,} . X_{2,}, \end{cases}$$

welches, weil hier die Summe der Wurzeln X_1 ist, auf der Stelle

$$886. \quad X_{1,} = \frac{X_1 + \tau_{1,}^{\frac{1}{2}}}{2}, \quad X_{2,} = \frac{X_1 - \tau_{1,}^{\frac{1}{2}}}{2}$$

giebt. Zugleich erhält man

$$887. \quad \tau_1 = X_1{}^2 + (\alpha - 1)\lambda_1,$$

und, wenn man $\alpha = -1$ setzt,

$$888. \quad \tau_{1,} = X_1{}^2 - 2\lambda_1.$$

Um $\tau_{1,}$ zu finden, muss man das Product $X_{1,} . X_{2,}$ entwickeln und dabei $r^{13} = 1$ setzen, welches

$$889. \quad X_{1,} . X_{2,} = 3 + X_{1,} \text{ und}$$

$$890. \quad \lambda_{1,} = 6 + 2X_2,$$

Allgemeine Auflösung

folglich

$$891.\quad \begin{cases} X_{1,} = \dfrac{X_1 + \sqrt{(X_1^2 - 12 - 4X_2)}}{2} \\ X_{2,} = \dfrac{X_1 - \sqrt{(X_1^2 - 12 - 4X_2)}}{2} \end{cases}$$

giebt.

295.

Hierbei ist zu bemerken, dass man, weil die Function X_1 in X_2 und die Function X_2 in X_1 übergeht, wenn man r^2 statt r setzt, das was aus $X_{1,}$ und $X_{2,}$ wird, wenn man in alle Potenzen von r, r^2 statt r setzt, welches wir durch $(X_{1,})$ und $(X_{2,})$ bezeichnen wollen, so dass

$$892.\quad \begin{cases} (X_{1,}) = r^2 + r^6 + r^5 \\ (X_{2,}) = r^8 + r^{11} + r^7 \end{cases}$$

ist, durch Verwechselung der Grössen X_1, X_2 mit $X_{1,} . X_{2,}$ findet. Man erhält

$$893.\quad \begin{cases} (X_{1,}) = \dfrac{X_2 + \sqrt{(X_2^2 - 12 - 4X_1)}}{2} \\ (X_{2,}) = \dfrac{X_2 - \sqrt{(X_2^2 - 12 - 4X_1)}}{2}. \end{cases}$$

Dieses sind die mit $X_{1,}$ und $X_{2,}$ correspondirenden Functionen, welche man erhalten würde, wenn man mit den Wurzeln, aus welchen X_2 zusammengesetzt ist (872.), eben so verführe, wie vorhin mit den Wurzeln in X_1. Die Werthe dieser Grössen $X_{1,}$ und $X_{2,}$ sind nöthig, um diejenigen von r zu finden.

296.

Zu diesem Zweck muss man noch die drei Wurzeln in X_1 als die Wurzeln einer Gleichung des

von $x^m = 1$.

dritten Grades betrachten und folglich

$$894.\quad t_2 = r + \alpha r^3 + \alpha^2 r^9$$

setzen, indem man für α eine Wurzel der Gleichung

$$y^2 - 1 = 0$$

nimmt.

Man setze nun die Functionen

$$895.\quad \tau_2 = t_2{}^3 = \lambda_{0_2} + \alpha\lambda_{1_2} + \alpha^2\lambda_{2_2}$$

zusammen, so findet man, wenn man erwägt, dass

$$896.\quad \alpha^3 = 1 \text{ und } r^{13} = 1$$

ist,

$$897.\quad \begin{cases} \lambda_{0_2} = 6 + X_{1,} \\ \lambda_{1_2} = 3\,(X_{1,}) \\ \lambda_{2_2} = 3\,(X_{2,}). \end{cases}$$

Bezeichnet man also die beiden Wurzeln der Gleichung

$$898.\quad y^2 + y + 1 = 0$$

durch α und β, und setzt,

$$899.\quad \begin{cases} \tau_{1_2} = 6 + X_{1,} + 3\alpha(X_{1,}) + 3\alpha^2(X_{2,}) \\ \tau_{2_2} = 6 + X_{1,} + 3\beta(X_{1,}) + 3\beta^2(X_{2,}), \end{cases}$$

so erhält man, wie in (§. 279.),

$$900.\quad r = \frac{X_{1,} + \tau_{1_2}^{\frac{1}{3}} + \tau_{2_2}^{\frac{1}{3}}}{3},$$

wodurch nun der Werth von r gänzlich bestimmt ist.

Wir wollen uns nicht damit aufhalten, diesen Ausdruck zu vereinfachen, weil es in allen Fällen vortheilhafter ist, sich zur Auflösung der Gleichung $x^{13} - 1 = 0$, so wie zur Auflösung aller andern

Allgemeine Auflösung von $x^m = 1$.

Gleichungen dieser Art, der bekannten Ausdrücke (703.) mit Sinus und Cosinus zu bedienen.

297.

Ich bemerke zum Schlusse, dass das in diesem Zusatze abgehandelte Verfahren als eine Vereinfachung des Verfahrens zu betrachten ist, welche, Gauss auf eine allgemeine Weise im 360ten Paragraph seiner „Disquisitiones arithmeticae" zeigte. Das dortige Verfahren beruht ebenfalls auf die Entwickelung einer Function, die derjenigen ähnlich ist, welche wir durch τ bezeichneten. Es erfordert aber ausserdem die Aufstellung und Entwickelung so vieler anderer Functionen der nämlichen Ordnung, als die Gleichung Wurzeln hat, welches die Rechnung bedeutend weitläufiger macht. Unser Verfahren ist von solchen Hülfs-Functionen unabhängig und giebt die einfachsten Ausdrücke der Wurzeln unmittelbar.

Ende des dritten Bandes.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Berlin, gedruckt bei G. Hayn.

Buchbinder S

Buchbinder Schinner

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Lagrange, Joseph Louis <<de>>,

J.L. Lagrange's mathematische Werke

Bd.: Dritter Band

Berlin 1824

Math.u. 91 s-3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594045-4